Exercice 17 page 177 :

a) $(x+2)(e^x-1)=0$ On reconnaît une équation-produit.

$$\begin{cases} x+2=0 \\ e^x-1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ e^x=e^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ x=0 \end{cases}$$

Donc, deux solutions : $x=-2$ et $x=0$

b) $(e^{-x}-e)^2=0$

$e^{-x}-e=0$

$e^{-x}=e^1$

$-x=1$

$x=-1$

c) $e^x(-2x+4)=0$ On reconnaît une équation-produit.

$$\begin{cases} e^x=0 \\ -2x+4=0 \end{cases}$$

L'équation $e^x=0$ n'a pas de solution car pour tout x, on a : $e^x>0$

Donc : $-2x+4=0$

$4=2x$

$x=2$

Exercice 20 page 177 :

a) $4e^{x-1}+x^2e^{x-1}=0$ On factorise

$e^{x-1}(4+x^2)=0$

Pour tout x : $e^{x-1}>0$ et $4+x^2\geq 4$

Donc cette équation n'a aucune solution.

b) $e^{4x}-e^2=0$

$e^{4x}=e^2$

$4x=2$

$x=\dfrac{1}{2}$

c) $xe^x-3e^{x+1}=0$

$xe^x-3e^x\times e^1=0$

$e^x(x-3e)=0$

Comme $e^x\neq 0$ alors il reste : $x-3e=0$

$x=3e$

d) $e^{2x}-2e^x+1=0$

$(e^x)^2-2e^x+1=0$

Posons : $y=e^x$

L'équation précédente devient : $y^2-2y+1=0$

C'est une équation du second degré ; on peut utiliser le discriminant, mais on peut aussi, pplus rapidement, utiliser l'identité remarquable :

$(y-1)^2=0$

$y-1=0$ soit $y=1$

On remplace : $\mathrm{e}^x=1$ Comme d'habitude, on écrit $1=\mathrm{e}^0$

$x=0$

2 Calculs de dérivée

Exercice 86 page 183 :

a) $f(x) = e^x - 3x + 4$

Facile : dérivée d'une somme. Sachant que la dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$, on obtient :

$f'(x) = e^x - 3$

b) $g(x) = x^2 e^x$

La fonction se présente comme un produit.

Posons : $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$

On a alors : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

Rappelons la formule donnant la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$

Ici, $g(x) = u(x) \times v(x)$, donc $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$g'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$

$g'(x) = e^x(2x + x^2)$

c) $h(x) = 2e^{-3x+1} - 3x + 1$

Il faut dériver la fonction $x \mapsto e^{-3x+1}$. Quand on a e^x, c'est simple, mais quand c'est autre chose que x, c'est un tout petit peu plus compliqué.

Rappelons la règle de dérivation d'une fonction composée :

Soient a et b, deux constantes. Si $f(x) = g(ax + b)$, alors $f'(x) = ag'(ax + b)$.

Prenons $g = \exp$, alors on obtient la très importante propriété :

$$\boxed{\text{Si } f(x) = e^{ax+b}, \text{ alors } f'(x) = ae^{ax+b}}$$

On applique ici cette propriété avec $a = -3$ et $b = 1$

On trouve : la dérivée de $x \mapsto e^{-3x+1}$ est : $x \mapsto -3e^{-3x+1}$

Le plus dur est fait. Le reste est comme d'habitude :

$h'(x) = 2 \times (-3)e^{-3x+1} - 3$

$h'(x) = -6e^{-3x+1} - 3$

d) $k(x) = (x + 1)e^{3x+1}$

C'est un produit. On pose $u(x) = x + 1$ et $v(x) = 3x + 1$

Alors : $u'(x) = 1$ et en appliquant la propriété vue à la question précédente : $v'(x) = 3e^{3x+1}$

Ainsi : $k'(x) = 1 \times e^{3x+1} + (x + 1) \times 3e^{3x+1}$

$k'(x) = e^{3x+1}(1 + 3(x + 1))$

$k'(x) = e^{3x+1}(3x + 4)$