La fonction exponentielle

1 Définition

Définition 1
Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, pour laquelle l'image de 0 est 1. On l'appelle la **fonction exponentielle**, notée exp.

Ainsi : $\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$

On note : **e** l'image de 1 par la fonction exponentielle.

L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises.

Le nombre e intervient dans de très nombreux domaines en mathématiques et en physique.

2 Relation fonctionnelle

Propriété 1
Pour tous réels a et b, on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$. Autrement dit, la fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Remarque : Cela indique que $\exp(b) \neq 0$. Autrement dit, la fonction exponentielle **ne s'annule pas**.

Conséquences :

1. $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(n \cdot a) = (\exp(a))^n$

   Autrement dit, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite (u_n) telle que $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est géométrique.
3. En particulier, si on pose $\mathrm{e} = \exp(1)$, on obtient : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
4. $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$.

3 Notation e^x

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.

On convient alors de **poser** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Attention : Il faut bien comprendre que, pour x non entier, **ce n'est qu'une notation**.

L'avantage essentiel est que, lorsqu'on les exprime avec la nouvelle notation, la propriété 1 et ses conséquences prennent tout à coup un air familier :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n, \text{ etc.}$$

On retrouve les propriétés des puissances, sauf qu'ici, les exposants sont des réels quelconques.

4 Étude de la fonction exponentielle

Comme conséquence de la propriété 1, on démontre :

Propriété 2
La fonction exp est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0	1	e	$+\infty$

La courbe :