Corrigé du devoir surveillé nº7

Exercice 1 :

1) $u_1=\frac{1}{2}u_0=\frac{1}{2}\times 8=4$; $u_2=\frac{1}{2}u_1=\frac{1}{2}\times 4=2$; $u_{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}u_0\simeq 7{,}6\times 10^{-6}$ (formule du cours.)

2) On dispose de la formule suivante pour calculer la somme de plusieurs termes consécutifs d'une suite géométrique : $S=\text{premier terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

Cela donne ici : $S=u_0+u_1+\ldots u_{20}=8\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right)\simeq 16$.

Exercice 2 :

(u_n) est la suite définie sur ℕ par $u_n=\frac{3n}{n+1}$.

1. Appliquons la méthode classique :
   $u_{n+1}-u_n=\frac{3(n+1)}{n+1+1}-\frac{3n}{n+1}=3\left(\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}\right)=3\left(\frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)}-\frac{n(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right)=3\times\frac{(n^2+2n+1)-(n^2+2n)}{(n+2)(n+1)}$
   $=3\times\frac{1}{(n+2)(n+1)}$
   Comme $n\in\mathbb{N}$, $n+1$ et $n+2$ sont positifs, donc $u_{n+1}-u_n>0$.
   Par conséquent, la suite (u_n) est croissante (et même strictement croissante.)
2. On observe que n et $n+1$ sont tous deux positifs, donc u_n est positif pour tout n. Donc (u_n) est minorée par 0.
   Calculons $u_{n+1}-3$: $u_{n+1}-3=\frac{3n}{n+1}-3=\frac{3n}{n+1}-\frac{3(n+1)}{n+1}=\frac{3n-3n-3}{n+1}=\frac{-3}{n+1}$.
   Comme $n+1$ est positif, $u_{n+1}-3<0$. Donc $u_{n+1}<3$ pour tout n.
   Par conséquent, (u_n) est majorée par 3.
3. (u_n) est-elle géométrique ? $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3(n+1)}{n+2}}{\frac{3n}{n+1}}=\frac{3(n+1)}{n+2}\times\frac{n+1}{3n}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. Ce n'est pas un nombre constant (indépendant de n) donc (u_n) n'est pas géométrique.
   (u_n) est-elle arithmétique ? $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{(n+2)(n+1)}$. Ce n'est pas une constante, donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   On peut aussi démontrer ceci en considérant les 3 premiers termes de la suite (u_n).

Exercice 3 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2+3u_n}$

1) $u_1=\dfrac{2u_0}{2+3u_0}=\dfrac{2\times 1}{2+3\times 1}=\dfrac{2}{5}$; $u_2=\dfrac{2u_1}{2+3u_1}=\dfrac{2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)}{2+3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)}=\dfrac{\dfrac{4}{5}}{\dfrac{16}{5}}=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

On admet que, pour tout n, $u_n\neq 0$. Pour tout entier n, on pose : $v_n=\dfrac{2}{u_n}$

2) $v_0=\dfrac{2}{u_0}=\dfrac{2}{1}=2$, $v_1=\dfrac{2}{u_1}=\dfrac{2}{\dfrac{2}{5}}=5$ et $v_2=\dfrac{2}{u_2}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{4}}=8$.

3) $v_{n+1}=\dfrac{2}{u_{n+1}}=2\times\dfrac{2+3u_n}{2u_n}=\dfrac{2+3u_n}{u_n}=\dfrac{2}{u_n}+\dfrac{3u_n}{u_n}=\dfrac{2}{u_n}+3$. Comme $v_n=\dfrac{2}{u_n}$, la formule précédente peut s'écrire : $v_{n+1}=v_n+3$. Par conséquent, (v_n) est une suite arithmétique de raison 3.

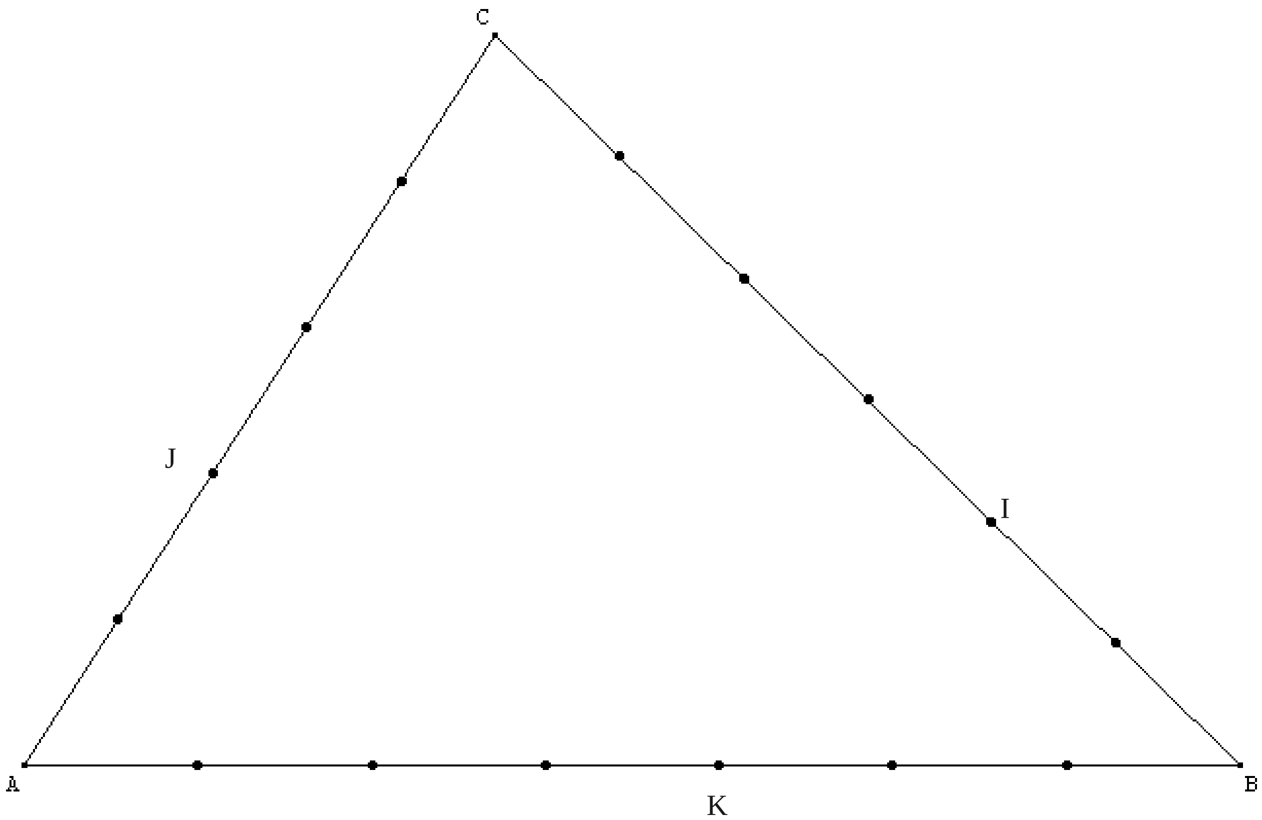
4) D'après le cours, on en déduit : $v_n=v_0+n\cdot r=2+3n$. Comme $u_n=\dfrac{2}{v_n}$, on en déduit $u_n=\dfrac{2}{2+3n}$.

Exercice 4 :

ABC est un triangle. D est le milieu de $[AB]$. E est le milieu de $[BC]$. F est le milieu de $[DE]$.
G est le centre de gravité de ABC.

1) D est le barycentre de $\{(A,1);(B,1);(C,0)\}$.
2) F est le barycentre de $\{(A,1);(B,2);(C,1)\}$.
3) F est le barycentre de $(B,1);(G,3)\}$.

Exercice 5 :



ABC est un triangle représenté ci-dessus. Les mesures de ses côtés sont : $AB = 7$, $BC = 6$ et $AC = 5$.
I est le barycentre de $\{(B, 2); (C, 1)\}$.
J est le barycentre de $\{(A, 3); (C, 2)\}$.
K est le barycentre de $\{(A, 3); (B, 4)\}$.
G est le barycentre de $\{(A, 3); (B, 4); (C, 2)\}$.

1) Sur le graphique.
2) Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

I est le barycentre de $\{(B, 2); (C, 1)\}$, donc aussi de $\{(B, 4); (C, 2)\}$. D'après le théorème d'associativité du barycentre, on peut donc remplacer le système de points pondérés $\{(B, 4); (C, 2)\}$ par $\{(I, 6)\}$.
G est le barycentre de $\{(A, 3); (B, 4); (C, 2)\}$, donc G est aussi le barycentre de $\{(A, 3); (I, 6)\}$.
Par conséquent, G appartient à la droite (AI).

De même :

J est le barycentre de $\{(A, 3); (C, 2)\}$. D'après le théorème d'associativité du barycentre, on peut donc remplacer le système de points pondérés $\{(A, 3); (C, 2)\}$ par $\{(J, 5)\}$.
G est le barycentre de $\{(A, 3); (B, 4); (C, 2)\}$, donc G est aussi le barycentre de $\{(B, 4); (J, 5)\}$.
Par conséquent, G appartient à la droite (BJ).

K est le barycentre de $\{(A, 3); (B, 4)\}$. D'après le théorème d'associativité du barycentre, on peut donc remplacer le système de points pondérés $\{(A, 3); (B, 4)\}$ par $\{(K, 7)\}$.
G est le barycentre de $\{(A, 3); (B, 4); (C, 2)\}$, donc G est aussi le barycentre de $\{(C, 2); (K, 7)\}$.
Par conséquent, G appartient à la droite (KC).

G appartient à la fois aux trois droites (AI), (BJ) et (CK). Donc les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.