MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº8

Exercice 1 :

	VRAI	FAUX
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n=0$.		✘
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n=+\infty$.	✘	
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}=0$.	✘	
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}=+\infty$.		✘
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n=0$.		✘
Une suite décroissante ne peut pas avoir pour limite $+\infty$.	✘	
Une suite ayant pour limite $+\infty$ est forcément croissante.		✘
Une suite croissante a forcément pour limite $+\infty$.		✘
Une suite de limite $+\infty$ n'est pas majorée.	✘	
Une suite décroissante peut avoir pour limite 0.	✘	

Exercice 2 :

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}=0$; $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$; donc $\lim_{n\to+\infty} 3n=+\infty$

donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2}+3n=+\infty}$

b) $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty} -4n^2=-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} -n=-\infty$

donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} -4n^2-n+17=-\infty}$

c) $\lim_{n\to+\infty} 2n=+\infty$

$\lim_{n\to+\infty} (-0{,}9)^n=0$ car : $-1 < 0{,}9 < 1$

donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} 2n+(-0{,}9)^n=+\infty}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}=0$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{5}\right)^n=+\infty$ car : $\sqrt{5} > 1$

Donc : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}+\left(\sqrt{5}\right)^n=+\infty}$

Exercice 3 :

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1) $u_1 = \frac{1}{4} \times 1 + 3 = \frac{13}{4}$; $u_2 = \frac{1}{4} \times \frac{13}{4} + 3 = \frac{13}{16} + 3 = \frac{61}{16}$

2) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$. Ainsi, on passe de v_n à v_{n+1} en multipliant à chaque fois par $\frac{1}{4}$. Donc, (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3) D'après le cours, on en déduit : $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. On calcule : $v_0 = 1 - 4 = -3$.

Par conséquent : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Comme $u_n = v_n + 4$, on en déduit : $\boxed{u_n = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

4) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$. Donc : $\lim_{n \to +\infty} 4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 4$: $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 4}$.