Devoir surveillé n°8 - Correction

Exercice 1 :

Voir la démonstration du cours.

Exercice 2 :

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$

Ici, (u_n) est géométrique, car on multiplie toujours par -2 pour passer d'un terme quelconque u_n au suivant u_{n+1}.
En revanche, (u_n) n'est pas arithmétique.
En effet, $u_0 = 5$, $u_1 = -10$, $u_2 = 20$.
On voit qu'on n'ajoute pas le même nombre pour passer de u_0 à u_1 et de u_1 à u_2.

b) $u_n = 3n + 2$
Ici, (u_n) est arithmétique.
En effet, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n+2) = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3$.
On obtient une constante.
En revanche, (u_n) n'est pas géométrique.
En effet, $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_2 = 7$.
On voit qu'on ne multiplie pas par le même nombre pour passer de u_0 à u_1 et de u_1 à u_2.

c) $u_n = -3 + 4^n$
Ici, $u_0 = -2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 13$.
On voit qu'on n'ajoute pas le même nombre, et on ne multiplie pas non plus par le même nombre pour passer de u_0 à u_1 et de u_1 à u_2.
Donc, (u_n) n'est ici ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 3 :

1. Pour passer de u_2 à u_6, on ajoute 4 fois la raison r.
   Par conséquent : $4r = 3{,}2 - 2 = 1{,}2$. On trouve $r = \frac{1{,}2}{4} = 0{,}3$
   On passe de u_0 à u_2 en ajoutant 2 fois r, soit 0,6.
   Donc $u_0 = u_2 - 0{,}6 = 2 - 0{,}6 = 1{,}4$

   Vérifions : $u_2 = u_0 + 2r = 1{,}4 + 2 \times 0{,}3 = 2$ → ça marche.
   $u_6 = u_0 + 6r = 1{,}4 + 6 \times 0{,}3 = 3{,}2$ → ça marche.

2. $u_n = u_0 + nr = 1{,}4 + 0{,}3n$

3. On passe d'un terme qulconque au suivant en ajoutant 0,3.
   Cette suite est donc croissante. Pas très difficile.

Exercice 4 :

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n \end{cases}$

1. On a ici : $u_1=\frac{5}{4}$, $u_2=\frac{5}{16}$.
2. On voit que (u_n) est géométrique, car on passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par $\frac{1}{4}$.

   On peut donc écrire, d'après le cours : $u_n=u_0\times q^n$. Ici : $u_n=5\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ou $u_n=\frac{5}{4^n}$.

3. D'après la question précédente :
   $S_n=5\times\left(\frac{1}{4}\right)^0+5\times\left(\frac{1}{4}\right)^1+\ldots+5\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=5\times\left[\left(\frac{1}{4}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

   On appliquela formule du cours : $1+q+q^2+q^3+q^4+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

   Ici, ça donne : $\left(\frac{1}{4}\right)^0+\left(\frac{1}{4}\right)^1+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

   On obtient donc : $5\times\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]=\frac{20}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

   On remplace n par 10. On obtient : $\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\simeq 0{,}0000002$, nombre assez petit.

   Donc $S_{10}\simeq\frac{20}{3}\simeq 6{,}67$

4.

```
Variables : n, u, S, k : nombres
Début algorithme
Entrée
      Lire n
Initialisation
      u prend la valeur 5 (c'est u0)
      S prend la valeur u
Traitement
      Pour k allant de 1 jusqu'à n :
            u prend la valeur 1/4*u (calcul du nouveau terme)
            S prend la valeur S+u (on ajoute ce terme à S)
      Fin Pour
Sortie
      Afficher S
```

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\frac{n}{n+1}$.

1. On calcule en réduisant au même dénominateur :
   $u_{n+1}-u_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)}-\frac{n(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{(n+1)(n+1)-n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

On simplifie le numérateur :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n^2+2n+1)-(n^2+2n)}{(n+2)(n+1)}=\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

Le numérateur est évidemment positif ; le dénominateur aussi car n étant positif, $n+1$ et $n+2$ sont positifs.

On a ainsi : $u_{n+1}-u_n>0$ donc $u_{n+1}>u_n$.

La suite (u_n) est donc croissante (et même strictement croissante).

2. Il suffit de résoudre l'inéquation :
   $u_n \leq 1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow n \leq n+1$ (on a conservé le sens de l'inégalité car $n+1$ est positif.)
   Or cette dernière inégalité est bien sûr vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On arrondit au 1/1000e :

n	1	2	5	10	100	1000	1 000 000
u_n	0,5	≈0,667	≈0,833	≈0,909	≈0,990	≈0,999	≈1

4. Au vu du tableau, on peut supposer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.