Correction du devoir surveillé n°4

Exercice 1 :

1. $u_n = 5 \times 2^{n+3}$
   $u_0 = 40$, $u_1 = 80$, $u_2 = 160$. Donc cette suite n'est pas arithmétique, mais elle a l'air géométrique. Vérifions-le.
   Méthode 1 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{5 \times 2^{n+4}}{5 \times 2^{n+3}} = \dfrac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-n-3} = 2$
   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante, donc (u_n) est géométrique (de raison 2).
   Méthode 2 : $u_n = 5 \times 2^{n+3} = 5 \times 2^3 \times 2^n$, qui est de la forme $u_n = u_0 \times q^n$ en posant $u_0 = 5 \times 2^3$ et $q = 2$.
   Comme u_n est de la forme $u_0 \times q^n$, alors (u_n) est géométrique.

2. $u_n = 1 + 5^n$
   $u_0 = 2$, $u_1 = 6$, $u_2 = 26$. On n'ajoute pas le même nombre pour passer de u_0 à u_1, et de u_1 à u_2, et on ne multiplie pas non plus par le même nombre.
   Donc cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$
   On a : $u_{n+1} = -5u_n$; donc on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par (-5). Ainsi, la suite (u_n) est géométrique.

4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2^n u_n \end{cases}$
   $u_0 = 1$, $u_1 = 2^0 \times u_0 = 1$, $u_2 = 2^1 \times u_1 = 2$. On n'ajoute pas le même nombre pour passer de u_0 à u_1, et de u_1 à u_2, et on ne multiplie pas non plus par le même nombre.
   Donc cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Exercice 2 :

1. Pour passer de u_2 à u_8, on ajoute 6 fois la raison r. Donc $11 = 2 + 6r$.
   Donc $r = \dfrac{11-2}{6} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$
   Comme $u_2 = u_0 + 2r$, alors $u_0 = u_2 - 2r = 2 - 2 \times 1{,}5 = -1$

2. Comme (u_n) est arithmétique, alors $u_n = u_0 + n \times r$. Ainsi : $u_n = -1 + 1{,}5n$

3. (u_n) est arithmétique de raison 1,5. Donc on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours 1,5. La suite est donc croissante.

4. La suite étant arithmétique, on peut écrire : $S = \text{nombre de termes} \times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$
   Le nombre de termes est 26.
   Le premier terme est $u_0 = -1$; le dernier terme est $u_{25} = -1 + 25 \times 1.5 = 36{,}5$
   Donc $S = 26 \times \dfrac{-1 + 36{,}5}{2} = 461{,}5$

Exercice 3 :

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^{n+1}}{n+1} - \dfrac{3^n}{n} = \dfrac{3^{n+1} \times n}{(n+1)n} - \dfrac{3^n \times (n+1)}{(n+1)n}$ (On réduit au même dénominateur.)

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^{n+1} \times n - 3^n(n+1)}{(n+1)n} = \dfrac{3^n \times 3n - 3^n(n+1)}{(n+1)n}$

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n(3n-(n+1))}{(n+1)n} = \dfrac{3^n(3n-n-1)}{(n+1)n}$ (On factorise par 3^n.)

   $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n(2n-1)}{(n+1)n}$

   Comme $n \geq 1$, $2n-1$ est positif pour tout n ; 3^n est positif pour tout n et $(n+1)n$ est positif. Donc $u_{n+1} - u_n$ est positif.

   Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

2. **Méthode 1** :
   $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 12(n+1) + 1 - (n^2 - 12n + 1) = n^2 + 2n + 1 - 12n - 12 + 1 - n^2 + 12n - 1$
   $u_{n+1} - u_n = 2n - 11$
   Lorsque $n \leq 5$, $2n - 11 < 0$; mais lorsque $n \geq 6$, $2n - 11 > 0$.
   $u_{n+1} - u_n$ ne garde pas un signe constant, donc la suite (u_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

   Méthode 2 :
   Si on pose : $f(x) = x^2 - 12x + 1$, on peut écrire : $u_n = f(n)$.
   f est un polynôme du second degré.
   $a > 0$ et $\dfrac{-b}{2a} = 6$ donc f est décroissante sur $]-\infty\,;6]$ et croissante sur $[6\,;+\infty[$.
   Donc u_n est décroissante pour n entre 0 et 6 et croissante à partir de $n = 6$.
   Donc, (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Exercice 4 :

1. $u_1 = \dfrac{4}{5} \times 2 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$

   $u_2 = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{32}{25} = 1{,}28$

   $u_3 = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{32}{25} = \dfrac{128}{125} = 1{,}024$

2. Comme, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n$, alors (u_n) est géométrique, de raison $\dfrac{4}{5}$.

   Par conséquent : $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

3. $u_{n+1} - u_n = 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1} - 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \times \dfrac{4}{5} - 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \left(\dfrac{4}{5} - 1\right)$

   $u_{n+1} - u_n = 2 \times \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \left(-\dfrac{1}{5}\right)$

   Appliquons la règle des signes : $2 > 0$, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n > 0$ et $-\dfrac{1}{5} < 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

   Donc la suite (u_n) est décroissante.

4. La suite étant géométrique, on sait que : $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{4}{5}}$

$$S_n = 2 \times \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}} = 2 \times 5 \times \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 10\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)$$

5. $S_{10} = 10\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\right) \simeq 9{,}141$

   $S_{20} = 10\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{21}\right) \simeq 9{,}991$

   $S_{50} = 10\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{51}\right) \simeq 10$

   La suite S_n semble avoir pour limite 10.

Exercice 5 :

Soit M la masse initiale de radon. Toutes les 4 heures, la masse de radon baisse 2,9%, autrement dit, elle est multipliée par $\left(1-\frac{2{,}9}{100}\right) = 0{,}971$.

Si n est le nombre de plages de 4 heures écoulées, et si u_n est la masse de radon restante, on a donc : $u_{n+1} = 0{,}971u_n$. Ainsi, u_n est une suite géométrique.

On cherche, par essai successifs, la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq \frac{1}{2}M$.

Autrement dit, on cherche n tel que $u_n \leq 0{,}5$. À la calculatrice :

$0{,}976^{10} \simeq 0{,}745 > 0{,}5$

$0{,}976^{20} \simeq 0{,}555 > 0{,}5$

$0{,}976^{30} \simeq 0{,}414 < 0{,}5$

$0{,}976^{25} \simeq 0{,}479 < 0{,}5$

$0{,}976^{24} \simeq 0{,}493 < 0{,}5$

$0{,}976^{23} \simeq 0{,}508 > 0{,}5$

Ainsi, la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \leq \frac{1}{2}M$ est 24.

La masse de l'échantillon est divisée par 2 au bout d'environ 24×4 heures, soit 4 jours.