Correction du devoir surveillé n° 8

Exercice 1 (Question de cours) :

Posons $S = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$

$qS = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1}$ d'où : $1 + qS = 1 + q + q^2 + ... + q + q^{n+1}$

D'autre part : $S + q^{n+1} = 1 + q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$

Ainsi, on voit que : $S + q^{n+1} = 1 + qS$

Donc : $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$.

Donc, si $q \neq 1$, on obtient : $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. CQFD.

Exercice 2 :

1. $u_n = 3 + n^2$
   On a : $u_0 = 3$; $u_1 = 4$; $u_2 = 7$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$, donc (u_n) n'est pas géométrique.
2. $v_n = \dfrac{2^{n+3}}{5^n}$
   On a : $v_n = \dfrac{2^3 \times 2^n}{5^n} = 8 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, de la forme $v = v_0 \times q^n$, en posant $q = \dfrac{2}{5}$.
   On reconnaît le terme général d'une suite géométrique.
   On peut aussi calculer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{2^{n+4}}{5^{n+1}}}{\frac{2^{n+3}}{5^n}} = \dfrac{2^{n+4}}{5^{n+1}} \times \dfrac{5^n}{2^{n+3}} = \dfrac{2^n \times 2^4}{5^n \times 5} \times \dfrac{5^n}{2^n \times 2^3}$
   On simplifie : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2^4}{2^3 \times 5} = \dfrac{2}{5}$.
   C'est une constante, donc (v_n) est géométrique.
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}1 \end{cases}$
   On passe de u_n à u_{n+1} en ajoutant toujours 0,1, donc la suite est arithmétique.

Exercice 3 :

1. $\dfrac{u_5}{u_2} = \dfrac{u_0 \times q^5}{u_0 \times q^2} = q^3$. Donc $q^3 = \dfrac{6250}{50} = 125$.
   On voit facilement (par essai ou en utilisant une racine cubique) que $q = 5$.
   $u_2 = u_0 \times q^2$, donc on a : $u_0 \times 5^2 = 50$, donc $u_0 = 2$.
2. C'est du cours : $u_n = u_0 \times q^n$; ici : $u_n = 2 \times 5^n$.
3. $u_{n+1} - u_n = 2 \times 5^{n+1} - 2 \times 5^n = 2 \times 5^n \times 5 - 2 \times 5^n = 2 \times 5^n \times (5 - 1) = 8 \times 5^n$.
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ est positif. Donc (u_n) est croissante.
4. On applique la formule du cours : $S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + ... + u_0 q^{20} = u_0(1 + q + q^2 + ... + q^{20}) = u_0 \dfrac{1 - q^{21}}{1 - q}$
   Ainsi : $S = 2 \times \dfrac{1 - 5^{21}}{1 - 5} = 2 \times \dfrac{1 - 5^{21}}{-4} = \dfrac{5^{21} - 1}{2} \simeq 2{,}38 \times 10^{14}$.

Exercice 4 :

1. $u_{n+1} = 2^n - n + 1$
Donc $u_n = 2^{n-1} - (n-1) + 1 = 2^{n-1} - n + 2$
$u_{n+1} - u_n = 2^n - n + 1 - (2^{n-1} - n + 2) = 2^n - n + 1 - 2^{n-1} + n - 2 = 2^{n-1} \times 2 - 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$.
Ici, le premier terme est u_1, donc $2^{n-1} \geq 2^0 = 1$. Donc $2^{n-1} - 1 \geq 0$.
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc (u_n) est croissante.
2. $v_n = n^2 - n - 1$
$v_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - 1 = n^2 + n - 1$
Donc $v_{n+1} - v_n = n^2 + n - 1 - (n^2 - n - 1) = n^2 + n - 1 - n^2 + n + 1 = 2n$
n est positif, puisqu'il appartient à $\mathbb{N}$, donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$.
Donc, (v_n) est croissante.

Exercice 5 :

1. $u_1 = \frac{1}{5}u_0 + 2 = \frac{1}{5} \times 8 + 2 = 3{,}6$
$u_2 \frac{1}{5}u_1 + 2 = \frac{1}{5} \times 3{,}6 + 2 = 2{,}72$
$u_3 \frac{1}{5}u_2 + 2 = \frac{1}{5} \times 2{,}72 + 2 = 2{,}544$
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, donc (u_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, donc (u_n) n'est pas géométrique.
2.
```
Lire n
Initialisation :
    u prend la valeur 8
Traitement :
    Pour k allant de 1 jusqu'à n :
        u prend la valeur 1/5 × u
    Fin Pour
Retourner u
```
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n - \frac{5}{2}$, donc $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2}$
On en déduit : $u_n = v_n + \frac{5}{2}$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + \frac{5}{2}$
On remplace dans la formule de récurrence :
$v_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{1}{5}(v_n + \frac{5}{2}) + 2$
$v_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} + 2$
$v_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{1}{5}v_n + \frac{1}{2} + 2$
$v_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{1}{5}v_n + \frac{5}{2}$
$v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$
Ceci montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Par ailleurs : $v_0 = u_0 - \frac{5}{2} = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$
4. Comme (v_n) est géométrique, alors : $v_n = v_0 q^n$. Ici : $v_n = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$
On a vu que : $u_n = v_n + \frac{5}{2}$
En remplaçant, on obtient : $u_n = \frac{11}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{5}{2}$

5. $u_5 = 2{,}50176$
$u_{10} \simeq 2{,}500000563$
$u_{20} \simeq 2{,}5$
On voit que les termes u_n ont l'air de se rapprocher de 2,5.
La limite de la suite (u_n) semble être 2,5.