

Mathématiques - Devoir surveillé n°8

Exercice 1 (Question de cours) (2 points) :

Soit q un nombre réel différent de 1. Démontrer que $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exercice 2 (4 points) :

Pour chacun des cas suivants, indiquer si (u_n) est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre. Justifier la réponse.

1. $u_n = 3^{2n+1}$
2. $u_n = 7 + 2^n$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$

Exercice 3 (4 points) :

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_2 = 2$ et $u_5 = 432$.

1. Déterminer la raison q de cette suite, puis son premier terme u_0 .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Déterminer le sens de variation de (u_n) (croissante, décroissante ou ni l'un ni l'autre).
4. Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{20}$ (donner une valeur approchée à 3 chiffres significatifs).

Exercice 4 (4 points) :

Étudier les variations des suites suivantes :

1. (u_n) définie par $u_n = \frac{2^n}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. (v_n) définie par $v_n = n^2 - 25n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (6 points) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite (u_n) est-elle géométrique, arithmétique ?
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 3$. Démontrer que (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0 .
3. Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que $u_n = 3 - 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
4. Calculer u_{10} , u_{20} , u_{100} . Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?