Correction du devoir surveillé n° 8

Exercice 1 (Question de cours) :

Soit $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$

On a : $qS_n = q(1 + q + q^2 + ... + q^n) = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1}$

Donc $qS_n + 1 = 1 + q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}$.

Donc $1 - q^{n+1} = S_n - qS_n = S_n(1 - q)$

Comme $q \neq 1$, $q - 1 \neq 0$, donc on peut diviser par $1 - q$.

On obtient : $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2 :

1. $u_n = 3^{2n+1}$
   On calcule facilement : $u_0 = 3$, $u_1 = 3^3 = 27$, $u_2 = 3^5 = 243$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

   En revanche, $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1} = 9$. Donc (u_n) est peut-être géométrique.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{2(n+1)+1}}{3^{2n+1}} = \dfrac{3^{2n+3}}{3^{2n+1}} = \dfrac{3^{2n} \times 3^3}{3^{2n} \times 3} = \dfrac{3^3}{3}$, en simplifiant par 3^{2n}.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante, donc u_n est géométrique.

   ---

2. $u_n = 7 + 2^n$
   On calcule : $u_0 = 7 + 2^0 = 8$, $u_1 = 7 + 2^1 = 9$, $u_2 = 7 + 2^2 = 11$.
   $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
   $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{9}{8} \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{11}{9}$ car $9 \times 9 \neq 11 \times 8$. Donc (u_n) n'est pas géométrique.

   ---

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

   On a : $u_{n+1} = u_n + (-3)$, donc par définition, (u_n) est arithmétique de raison (-3).
   On calcule facilement : $u_1 = -2$ et $u_2 = -5$.
   $\dfrac{u_1}{u_0}$ et $\dfrac{u_2}{u_1}$ ne sont pas égaux (ils ne sont même pas de même signe), donc (u_n) n'est pas géométrique.

   ---

4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$

   On calcule facilement : $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, etc.
   Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et $\dfrac{u_1}{u_0} = 2 \neq \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2}$.

   Donc (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

Exercice 3 :

1. On multiplie par q pour passer de u_2 à u_3, puis de u_3 à u_4, puis de u_4 à u_5, donc on multiplie par q^3 pour passer de u_2 à u_5.

   Ainsi, $2 \times q^3 = 432$, donc $q^3 = \dfrac{432}{2} = 216$.

   Par essais successifs, on trouve facilement $\boxed{q = 6}$.

   Comme $u_2 = u_0 \times q^2$, alors $u_0 = \dfrac{u_2}{q^2} = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$.

2. Facile. Comme (u_n) est géométrique, alors $u_n = u_0 q^n$. Ici : $\boxed{u_n = \dfrac{6^n}{18}}$.

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{6^{n+1}}{18} - \dfrac{6^n}{18} = \dfrac{6^n \times 6}{18} - \dfrac{6^n}{18} = \dfrac{6^n}{18}(6-1) = \dfrac{5 \times 6^n}{18}$.

   Tous les nombres dans ce quotient sont positifs, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$.

   Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$ (strictement).

4. On applique la formule du cours, car le calcul direct de la somme est fastidieux.

   $S = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + ... + u_0 q^{20} = u_0(1 + q + q^2 + ... + q^{20}) = u_0 \dfrac{1-q^{21}}{1-q}$.

   Donc, en remplaçant : $S = \dfrac{1}{18} \times \dfrac{1-6^{21}}{1-6} = \dfrac{1}{18} \times \dfrac{1-6^{21}}{-5} = \dfrac{1}{18} \times \dfrac{6^{21}-1}{5} = \dfrac{6^{21}-1}{90}$.

   On trouve : $\boxed{S \simeq 2{,}44 \times 10^{14}}$.

Exercice 4 :

1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)+2} - \dfrac{2^n}{n+2} = \dfrac{2^{n+1}}{n+3} - \dfrac{2^n}{n+2} = \dfrac{2^n \times 2}{n+3} - \dfrac{2^n}{n+2}$.

   Avant de réduire au même dénominateur, il est peut-être judicieux de mettre 2^n en facteur :

   $$u_{n+1} - u_n = 2^n \left(\frac{2}{n+3} - \frac{1}{n+2} \right) = 2^n \left(\frac{2(n+2)}{(n+3)(n+2)} - \frac{(n+3)}{(n+3)(n+2)} \right) = 2^n \left(\frac{2(n+2)-(n+3)}{(n+3)(n+2)} \right)$$
   $$u_{n+1} - u_n = 2^n \left(\frac{2n+4-n-3}{(n+3)(n+2)} \right) = 2^n \left(\frac{n+1}{(n+3)(n+2)} \right)$$

   Comme $n \in \mathbb{N}$, alors $n+1$, $n+2$ et $n+3$ sont strictement positifs ; 2^n est lui aussi strictement positif (par définition).

   Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

2. $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - 25(n+1) - (n^2 - 25n) = n^2 + 2n + 1 - 25n - 25 - n^2 + 25n = 2n - 24 = 2(n-12)$.

   On voit que $v_{n+1} - v_n$ est d'abord négatif (pour $n \leq 12$) puis positif (pour $n \geq 12$).

   Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ n'est ni croissante, ni décroissante}}$. On dit pour résumer qu'elle n'est pas monotone.

Exercice 5 :

1. $u_1 = \dfrac{1}{3} \times 0 + 2 = 2$

   $u_2 = \dfrac{1}{3} \times 2 + 2 = \dfrac{2}{3} + \dfrac{6}{3} = \dfrac{8}{3}$

   $u_3 = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{8}{3} + 2 = \dfrac{8}{9} + \dfrac{18}{9} = \dfrac{26}{9}$

2. Grand classique.

   $v_n = u_n - 3$, donc $u_n = v_n + 3$

   De même au rang suivant : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$, donc $u_{n+1} = v_{n+1} + 3$

Dans la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$, on exprime u_{n+1} et u_n en fonction de v_{n+1} et v_n.

On obtient : $v_{n+1} + 3 = \dfrac{1}{3}(v_n + 3) + 2$

Ainsi : $v_{n+1} + 3 = \dfrac{1}{3}v_n + \dfrac{1}{3} \times 3 + 2 = \dfrac{1}{3}v_n + 1 + 2 = \dfrac{1}{3}v_n + 3$

Donc, en simplifiant : $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Comme, pour tout n, $v_n = u_n - 3$, alors $v_0 = u_0 - 3$; alors $v_0 = 0 - 3 = -3$.

3. Comme on a démontré que (v_n) est géométrique, on peut appliquer la formule du cours : $v_n = v_0 q^n$.

   Ici, on obtient : $v_n = -3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   Or, on sait que pour tout n, $u_n = v_n + 3$.

   On en déduit en remplaçant : $u_n = -3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3 = 3 - 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

4. $u_{10} = 3 - 3 \times +3 = 3 - 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{10} \simeq 2{,}999949195$.

   $u_{20} = 3 - 3 \times +3 = 3 - 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{20} \simeq 2{,}999999999$.

   $u_{100} = 3 - 3 \times +3 = 3 - 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{100} \simeq 3$.

   La calculatrice, ici, ne fait plus la différence, car $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{100}$ est trop petit.

   Manifestement, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3}$.

   Remarque : Pour le démontrer, il suffit de se rappeler que si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

   Ici, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 - 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 3$.