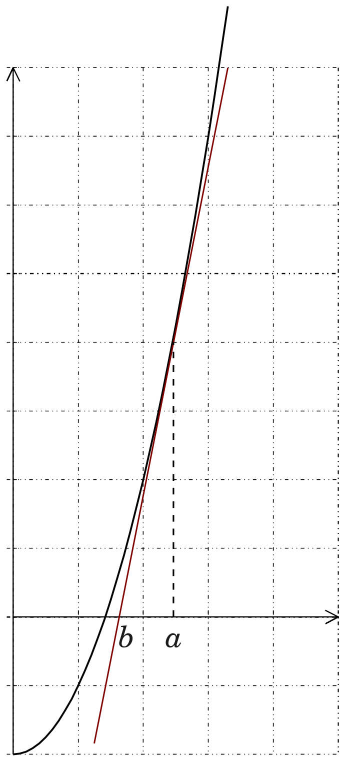
Suites et valeurs approchées d'équations

Nous avons vu au cours de la leçon sur les **dérivées** comment on pouvait appliquer les résultats liés à cette notion pour résoudre des équations de façon approchée.
Nous reprenons ici l'exemple de la détermination approchée de $\sqrt{2}$.

1. Nous avons d'abord choisi une fonction qui s'annule en $\sqrt{2}$. La plus simple est $f : x \rightarrow f(x) = x^2 - 2$.

   Nous partons d'un nombre a pas trop éloigné de $\sqrt{2}$.
   La tangente T_a en a à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant f a pour équation T_a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Cette tangente coupe l'axe des abscisses en un point de coordonnées (b ; 0).
   On trouve la valeur de b en résolvant l'équation : $f'(a)(b-a) + f(a) = 0$.
   On obtient : $b = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.
   On sait que : $f'(x) = 2x$. Donc, en remplaçant :
   $b = a - \dfrac{a^2-2}{2a} = \dfrac{2a^2-(a^2-2)}{2a} = \dfrac{a^2+2}{2a}$.

   Par un raisonnement graphique, on peut penser que b est plus près que a de $\sqrt{2}$.



2. Répétant l'opération, on détermine ainsi un **algorithme**, lequel produit une **suite** de nombres qui se rapprochent de $\sqrt{2}$.

   Ce procédé de calcul approché est connu sous le nom de méthode de Newton (eh oui, encore lui), mais dans le cas particulier de la recherche d'une racine carrée, il était déjà connu dans l'antiquité et porte le nom d'algorithme de Babylone.

3. Nous allons à présent nous intéresser de plus près à cette suite.
   Appelons-la (u_n). On a donc : $\begin{cases} u_0 = \text{valeur de départ} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+2}{2u_n} \end{cases}$
   Représenter la suite grâce à la « représentation graphique en chemin ». Pour cela, il faut tracer la courbe représentant la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x}$ et la droite d'équation $y = x$. On peut le faire à l'aide de Geogebra (animation jointe).
4. Vérifier que $\sqrt{2}$ est un point fixe de f, c'est à dire que $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
5. On donne à u_0 une valeur quelconque $\geqslant 2$.
   À partir du graphique, quelle hypothèse peut-on faire sur (u_n) : est-elle bornée ? est-elle monotone ?
   Remarque : pour démontrer ces hypothèses, il faut avoir recours à une propriété étudiée en terminale qu'on appelle le raisonnement par récurrence.
6. Remplir le tableau en prenant u_0= 10 (à l'aide d'un tableur par exemple).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n											
$u_n - \sqrt{2}$											

Est-ce que la suite converge « rapidement vers » $\sqrt{2}$? Comment peut-on l'expliquer de façon qualitative ?