Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

1. $z_1 + z_2 = 3 + 2i - 1 + 4i$

$$z_1 + z_2 = 2 + 6i$$

2. $z_1 \times z_2 = (3+2i)\times(-1+4i) = -3\times 1 + 3\times 4i - 2i\times 1 + 2i\times 4i = -3 + 12i - 2i + 8i^2 = -3 + 10i - 8$

$$z_1 \times z_2 = -11 + 10i$$

3. $z_1^2 = (3+2i)^2 = 3^2 + 2\times 3\times 2i + (2i)^2 = 9 + 12i + 4i^2 = 9 + 12i - 4$

$$z_1^2 = 5 + 12i$$

4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+2i}{-1+4i} = \dfrac{(3+2i)(-1-4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \dfrac{-3\times 1 - 3\times 4i - 2i\times 1 - 2i\times 4i}{(-1)^2 - (4i)^2} = \dfrac{-3-14i-8\times(-1)}{1-16i^2} = \dfrac{-3-14i+8}{1+16}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-14i}{17} = \frac{5}{17} - \frac{14i}{17}$$

5. $\overline{z_1}\times\overline{z_2} = \overline{z_1\times z_2} = \overline{-11+10i}$

$$\overline{z_1}\times\overline{z_2} = -11 - 10i$$

6. $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\dfrac{5}{17} - \dfrac{14i}{17}}$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{5}{17} + \frac{14i}{17}$$

Exercice 2 :

1. $z + iz = 2 + 5i$

$(1+i)z = 2 + 5i$

$z = \dfrac{2+5i}{1+i} = \dfrac{(2+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-2i+5i-5i^2}{1^2 - i^2} = \dfrac{7+3i}{1+1}$

$$z = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i$$

2. $(2+i)\,z + 2i = 4z - 1$

$(2+i)\,z - 4z = -1 - 2i$

$(2+i-4)\,z = -1 - 2i$

$(-2+i)\,z = -1 - 2i$

$z = \dfrac{-1-2i}{-2+i} = \dfrac{(-1-2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \dfrac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2} = \dfrac{2+5i-2}{4+1} = \dfrac{5i}{5}$

$$z = i$$

Exercice 3 :

1. $|z| = |2+2i| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$ soit : $\boxed{|z| = 2\sqrt{2}}$.

Soit θ un argument de z.

On a : $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On retrouve des valeurs connues ; d'après le tableau des valeurs remarquables : $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$

2. $|z'| = |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4}$ soit : $\boxed{|z| = 2}$.

Soit θ' un argument de z'.

On a : $\cos(\theta') = \dfrac{x'}{|z'|} = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin(\theta') = \dfrac{y'}{|z'|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'après le tableau des valeurs remarquables, on sait que : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\cos(\theta') = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin(\theta') = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. À l'aide d'un petit dessin, on voit que $\boxed{\theta' = \frac{2\pi}{3}}$.

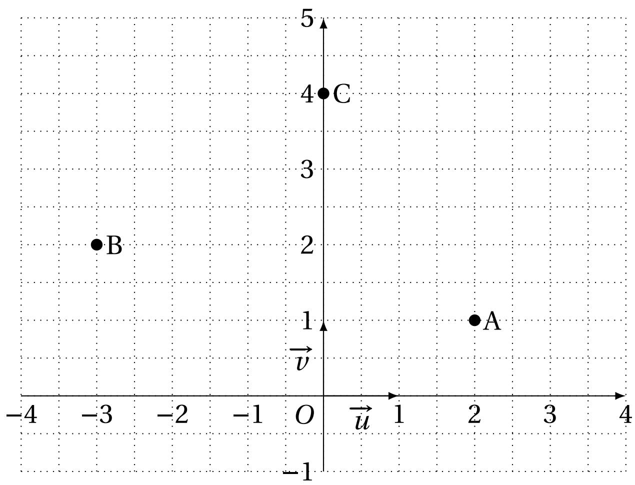
3. À partir des questions précédentes, on déduit facilement l'écriture sous forme trigonométrique de z et z' :

$$\boxed{z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$\boxed{z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

Exercice 4 :

1.



2. $|z_A - z_C| = |2 + i - 4i| = |2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

   $|z_B - z_C| = |-3 + 2i - 4i| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

3. D'après le cours, on sait que :
   $|z_A - z_C| = CA$
   et $|z_B - z_C| = CB$.
   La question précédente montre donc que CA = CB. Donc le triangle ABC est isocèle.