Correction du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1. $z_1 + z_2 = 5 - 2i + 3 + i = 5 + 3 - 2i + i = 8 - i$
2. $z_1 \times z_2 = (5-2i)(3+i) = (5 \times 3 + 5 \times i - 2i \times 3 - 2i \times i = 15 + 5i - 6i - 2 \times (-1) = 17 - i$
3. $z_1^2 = (5-2i)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 2i + (2i)^2 = 25 - 20i + 4i^2 = 25 - 20i - 4 = 21 - 20i$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5-2i}{3+i} = \dfrac{(5-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{15-5i-6i+2i^2}{3^2-i^2} = \dfrac{15-11i-2}{9+1} = \dfrac{13-11i}{10} = \dfrac{13}{10} - \dfrac{11}{10}i$
5. On sait que : $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{z_1 \times z_2}$, d'après les propriétés du conjugué.
   On a déjà calculé : $z_1 \times z_2 = 17 - i$.
   Donc : $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = \overline{17 - i} = 17 + i$
6. On sait que : $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$, d'après le cours.
   On a déjà calculé : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{13}{10} - \dfrac{11}{10}i$
   Donc : $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \overline{\dfrac{13}{10} - \dfrac{11}{10}i} = \dfrac{13}{10} + \dfrac{11}{10}i$

Exercice 2 :

1. $z + 3iz = 5 - 4i$
   $(1+3i)z = 5 - 4i$
   $z = \dfrac{5-4i}{1+3i}$
   $z = \dfrac{(5-4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{5-15i-4i+12i^2}{1^2-(3i)^2} = \dfrac{5-19i-12}{1-9i^2} = \dfrac{-7-19i}{10}$
   $z = -\dfrac{7}{10} - \dfrac{19}{10}i$
2. $iz + 2i = 4z - 1$
   $-4z + iz = -1 - 2i$
   $(-4+i)z = -1 - 2i$
   $z = \dfrac{-1-2i}{-4+i}$
   $z = \dfrac{(-1-2i)(-4-i)}{(-4+i)(-4-i)}$
   $z = \dfrac{4+i+8i+2i^2}{(-4)^2-i^2}$
   $z = \dfrac{4+9i-2}{16-(-1)}$
   $z = \dfrac{2+9i}{17}$
   $z = \dfrac{2}{17} + \dfrac{9}{17}i$

Exercice 3 :

1. Module : $|z| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
   Soit θ un argument de z. Alors : $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   Et : $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z|} = -\dfrac{5}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

On voit que θ fait partie de la famille des $k\dfrac{\pi}{4}$.

Un petit dessin montre qu'on peut prendre : $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi : $|z| = 5\sqrt{2}$ et $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}$

2. Module : $|z'| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{16} = 4$

   Soit θ un argument de z'. Alors : $\cos(\theta) = \dfrac{x}{|z'|} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

   Et : $\sin(\theta) = \dfrac{y}{|z'|} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   On voit que θ fait partie de la famille des $k\dfrac{\pi}{6}$, $k\dfrac{\pi}{3}$.

   Un petit dessin montre qu'on peut prendre : $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

   Ainsi : $|z'| = 4$ et $\arg(z') = -\dfrac{\pi}{3}$

3. D'après la question 1 :

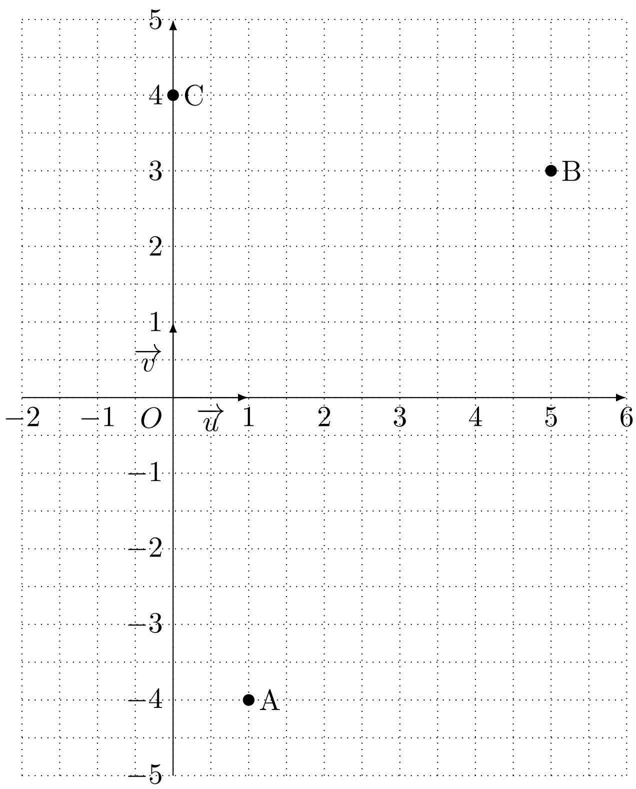
   $z = 5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

   D'après la question 2 :

   $z' = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 4 :

1. On obtient :



2. $|z_B - z_A| = |5 + 3\mathrm{i} - (1 - 4\mathrm{i})| = |4 + 7\mathrm{i}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49}$. Ainsi, $|z_B - z_A| = \sqrt{65}$

3. $|z_C - z_A| = |4\mathrm{i} - (1 - 4\mathrm{i})| = |-1 + 8\mathrm{i}| = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 64}$. Ainsi, $|z_C - z_A| = \sqrt{65}$

4. On sait d'après le cours que $|z_B - z_A| = AB$ et $|z_C - z_A| = AC$.

   On voit que $AB = AC$. Donc le triangle ABC est isocèle.