Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 : Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : f(x) = 2x^3 + 7x + 5$
   $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 7 \times 1 + 0$
   $$\boxed{f'(x) = 6x^2 + 7}$$
2. $g : g(x) = \dfrac{3}{x} + 7$
   $g'(x) = 3 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + 0$
   $$\boxed{g'(x) = -\dfrac{3}{x^2}}$$
3. $h : h(x) = 4\sin(x) + \dfrac{1}{2}$
   $h'(x) = 4\cos(x) + 0$
   $$\boxed{h'(x) = 4\cos(x)}$$
4. $m : m(x) = 5\cos(3x+2)$
   $m(x)$ est de la forme $5\cos(\omega x + \phi)$ avec $\omega = 3$ et $\phi = 2$.
   On sait alors que : $m'(x) = 5 \times -\omega\sin(\omega x + \phi) = 5 \times (-3)\sin(3x+2)$.
   $$\boxed{m'(x) = -15\sin(3x+2)}$$
5. $k : k(x) = x^2\sin(x)$
   Posons : $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin(x)$. On a alors : $k(x) = u(x)v(x)$.
   Alors, d'après le cours : $k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
   $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \cos(x)$.
   Ainsi :
   $$\boxed{k'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)}$$
6. $l : l(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$
   Posons : $u(x) = x+3$ et $v(x) = x^2+1$. On a alors : $l(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.
   Alors, d'après le cours : $l'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$.
   $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$.
   Ainsi : $l'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - (x+3)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}$
   $$\boxed{l'(x) = \dfrac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}}$$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-1{,}5\ ;\ 3{,}5[$ par : $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 15x + 50$. Soit $\mathscr{C}$ sa courbe.

1. $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 12 \times 2x - 15 \times 1 + 0$
   $$\boxed{f'(x) = 12x^2 - 24x - 15}$$
2. On voit que f' est une fonction polynôme du second degré. Il n'y a pas de factorisation évidente. On emploie donc la méthode générale.
   $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 12 \times (-15) = 1296$
   $\Delta > 0$: il y a donc deux racines.
   $x_1 = \dfrac{24 - \sqrt{1296}}{2 \times 12} = \dfrac{24-36}{24} = \dfrac{-12}{24} = -\dfrac{1}{2} = 0{,}5$
   $x_2 = \dfrac{24 + \sqrt{1296}}{2 \times 12} = \dfrac{24+36}{24} = \dfrac{60}{24} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

On sait que $f'(x)$ est du signe de a, sauf entre les racines.
Ainsi $f'(x)$ est positif pour $x \in]-1,5\ ;\ -0,5] \cup [2,5\ ;\ 3,5[$ et négatif pour $x \in [-0,5\ ;\ 2,5]$.

3. On obtient le tableau :

x	$-1,5$		$-0,5$		$2,5$		$3,5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	32	$\nearrow$	54	$\searrow$	0	$\nearrow$	22

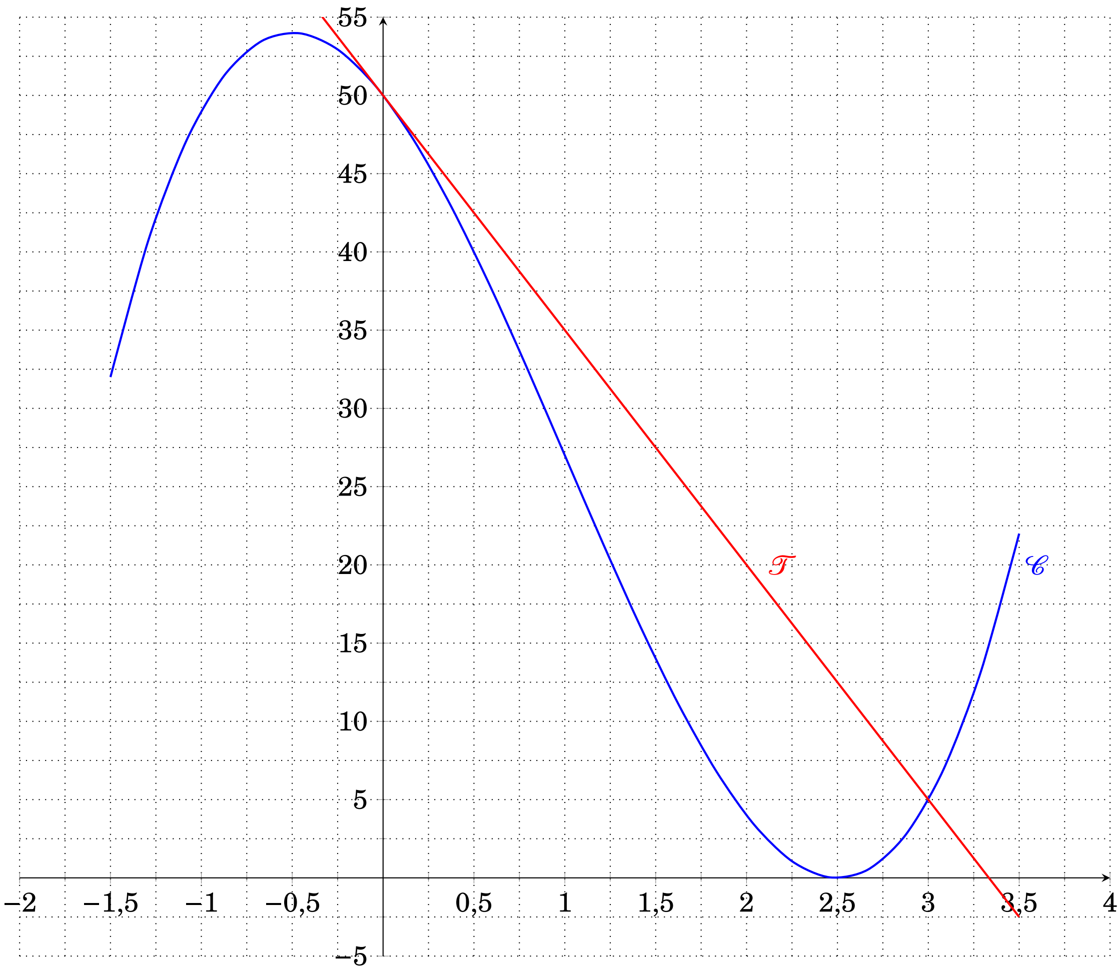
4. D'après le cours, la tangente $\mathscr{T}$ a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
$f(0) = 4 \times 0^3 - 12 \times 0^2 - 15 \times 0 + 50 = 50$
$f'(0) = 12 \times 0^2 - 24 \times 0 - 15 = -15$
Donc :

$$\mathscr{T} : y = -15x + 50$$

5. Le tableau :

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$
$f(x)$	32	49	54	50	40	27	14	4	0	5	22

6.



Pour tracer $\mathscr{T}$, il suffit d'un petit tableau de valeurs, par exemple :

x	0	3
y	50	5

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ par $f(x) = 2\sin x - \sin(2x)$.

1. On a, d'après le cours : $f'(x) = 2\cos(x) - 2\cos(2x)$.
2. $f'(x) = 0$ s'écrit d'après la question précédente : $2\cos(x) - 2\cos(2x)$

   soit : $2\cos(x) = 2\cos(2x)$

   $\cos(x) = \cos(2x)$

   D'après le cours sur la trigonométrie, ceci est équivalent à :

   $$\left\{\begin{array}{l} x = 2x + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -2x + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

   soit à :

   $$\left\{\begin{array}{l} -x = k2\pi \\ \text{ou} \\ 3x = k2\pi \end{array}\right.$$

   donc :

   $$\left\{\begin{array}{l} x = k2\pi \\ \text{ou} \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

   Comme le premier ensemble de solutions est inclus dans le second, les solutions sont de la forme : $x = k\dfrac{2\pi}{3}$.

   On garde uniquement les solutions qui sont dans l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

   On obtient donc l'ensemble solution :

   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{2\pi}{3} \ ; 0 \ ; \frac{2\pi}{3}\right\}}$$

3. À partir de la courbe, on voit facilement que $f'(x)$ est négatif pour $x \in \left[-\pi \ ; -\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3} \ ; \pi\right]$ et positif pour $x \in \left[-\dfrac{2\pi}{3} \ ; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.
4. Le tableau :

x	$-\pi$		$-\dfrac{2\pi}{3}$		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

   Calcul des valeurs remarquables :

   $f(-\pi) = 2\sin(-\pi) - \sin(-2\pi) = 2 \times 0 - 0 = 0$

   $$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(-2 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

   $$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

   $f(\pi) = 2\sin(\pi) - \sin(2\pi) = 2 \times 0 - 0 = 0$