Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 :

Dans tout cet exercice, on utilise le fait que $|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ (l'opposé de x) si x est positif.

1. -15 est négatif. Donc $\boxed{|-15| = 15}$ (son opposé).

   On a $\sqrt{5} \simeq 2{,}24$ donc $\sqrt{5}-2$ est positif. Donc, $\boxed{|\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2}$.

   D'après le calcul précédent, $2-\sqrt{5}$ est négatif. Donc $\boxed{|2-\sqrt{5}| = -2+\sqrt{5} = \sqrt{5}-2}$.
   On retrouve sur cet exemple le fait que deux nombres opposés ont la même valeur absolue.
   On sait que $\pi \simeq 3{,}14$ donc $3-\pi$ est négatif. Donc $\boxed{|3-\pi| = -3+\pi = \pi-3}$.

2. a) $|x-3| = 2$.
   Suivant le signe de $x-3$, $|x-3| = x-3$ ou $|x-3| = -x+3$.
   On fait donc deux cas :
   • Soit $x-3 < 0$, alors $|x-3| = -x+3$; donc l'équation $|x-3| = 2$ s'écrit $-x+3 = 2$.
   On résout : $-x+3 = 2$ donc $-x = 2-3 = -1$ donc $x = 1$.
   • Soit $x-3 > 0$, alors $|x-3| = x-3$; donc l'équation $|x-3| = 2$ s'écrit $x-3 = 2$.
   On résout : $x-3 = 2$ donc $x = 2+3 = 5$.
   Les solutions sont donc 1 et 5. $\boxed{\mathscr{S} = \{1;5\}}$.

   b) $|x+5| = 1$
   Suivant le signe de $x+5$, $|x+5| = x+5$ ou $|x+5| = -x-5$.
   On fait donc deux cas :
   • Soit $x+5 < 0$, alors $|x+5| = -x-5$; donc l'équation $|x+5| = 1$ s'écrit $-x-5 = 1$.
   On résout : $-x-5 = 1$ donc $-x = 1+5 = 6$ donc $x = -6$.
   • Soit $x+5 > 0$, alors $|x+5| = x+5$; donc l'équation $|x+5| = 1$ s'écrit $x+5 = 1$.
   On résout : $x+5 = 1$ donc $x = 1-5 = -4$.
   Les solutions sont donc -6 et -4. $\boxed{\mathscr{S} = \{-6;-4\}}$.

3. Lorsque $x \in]-\infty;0[$, x est négatif et $x-3$ est lui aussi négatif.
   Par conséquent, $|x| = -x$ et $|x-3| = -x+3$. On a donc : $|x|+|x-3| = -x-x+3 = -2x+3$.
   Ainsi : $\boxed{\text{lorsque } x \in]-\infty;0[,\ f(x) = -2x+3}$.
   Lorsque $x \in]0;3[$, x est positif mais $x-3$ est négatif.
   Par conséquent, $|x| = x$ et $|x-3| = -x+3$. On a donc : $|x|+|x-3| = x-x+3 = 3$.
   Ainsi : $\boxed{\text{lorsque } x \in]0;3[,\ f(x) = 3}$.
   On peut remarquer que la fonction f est constante sur l'intervalle $x \in]0;3[$.

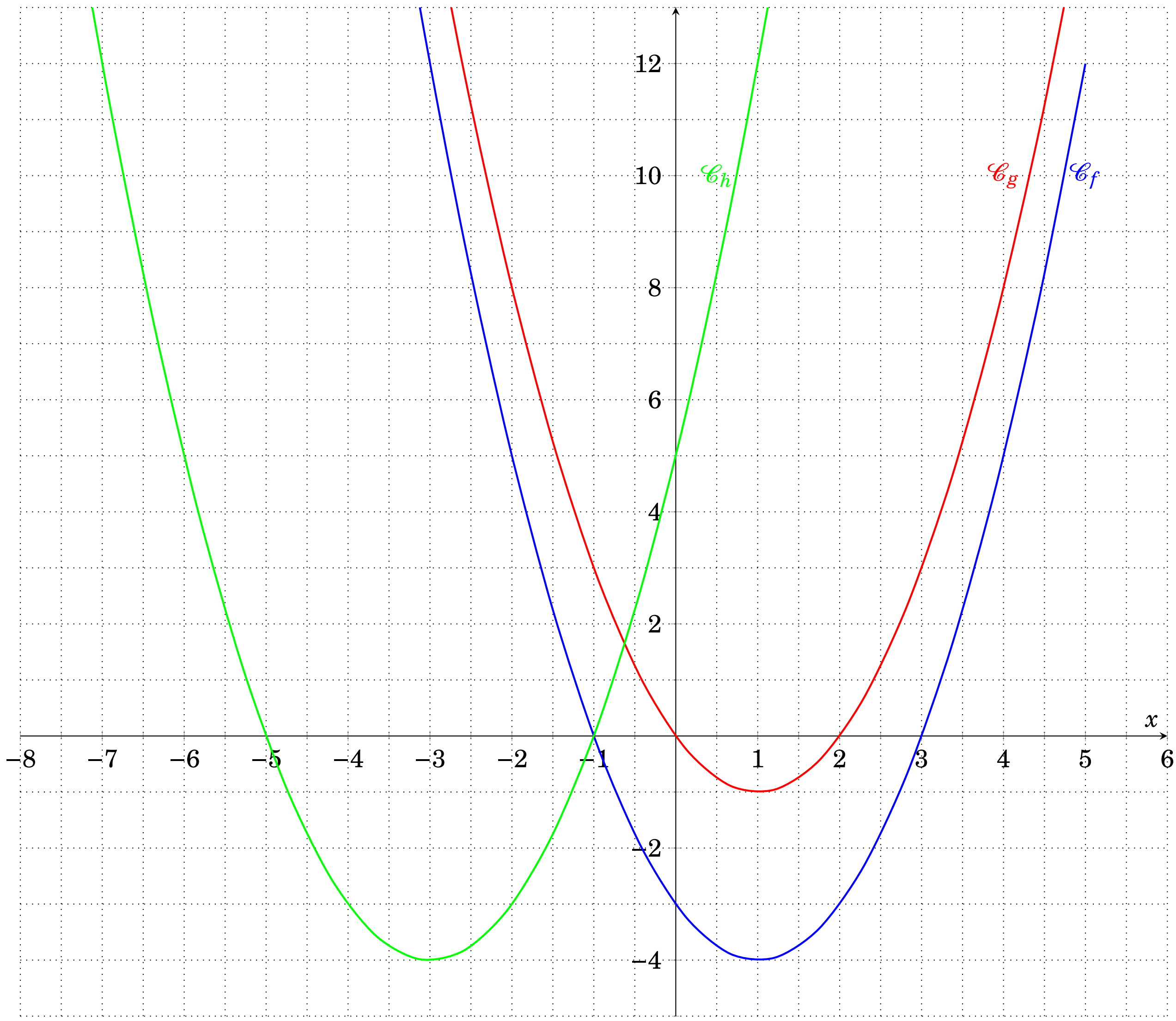
Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par : $f(x) = x^2-2x-3$

1. Remplir le tableau :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

2. Sur le graphique.
3. D'après le cours, $\mathscr{C}_g$ s'obtient en décalant la courbe $\mathscr{C}_f$ de 3 unités vers le haut; autrement dit, $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $3\vec{j}$.
4. D'après le cours, $\mathscr{C}_h$ s'obtient en décalant la courbe $\mathscr{C}_f$ de 4 unités vers la gauche; autrement dit, $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-4\vec{i}$.



Exercice 3 :

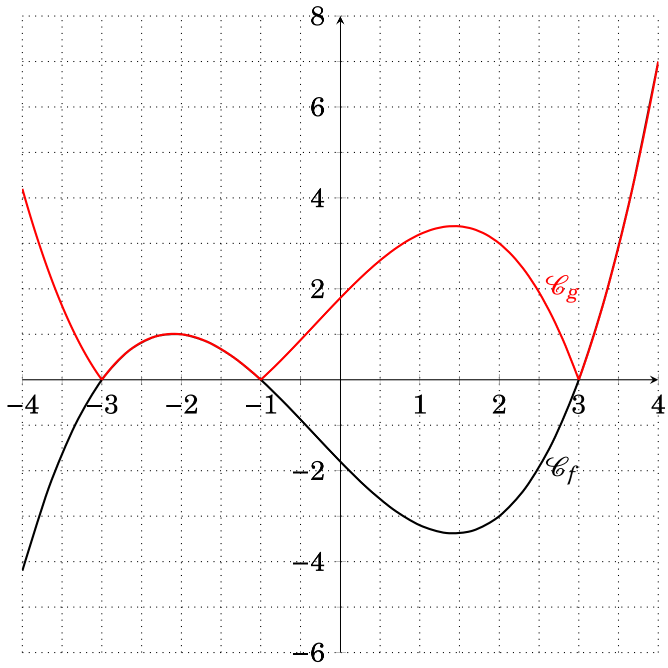
On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.

Tracer en rouge sur le même repère la courbe $\mathscr{C}_g$ représentant la fonction g définie par : $g(x) = |f(x)|$.

On sait que : $g(x) = f(x)$ lorsque $f(x)$ est positif et $g(x) = -f(x)$ lorsque $f(x)$ est négatif.

Ainsi :

- sur les intervalles où $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ sont confondues,
- sur les intervalles où $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de l'axe des abscisses, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 4 : Les tableaux de g, h et k se construisent en utilisant les propriétés du cours :

$\mathscr{C}_g$ s'obtient en décalant la courbe $\mathscr{C}_f$ de 3 unités vers le bas ; autrement dit, $\mathscr{C}_g$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $-3\vec{j}$;

$\mathscr{C}_h$ s'obtient en décalant la courbe $\mathscr{C}_f$ de 2 unités vers la droite ; autrement dit, $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$;

$\mathscr{C}_k$ s'obtient en décalant la courbe $\mathscr{C}_f$ de 2 unités vers la droite et de 3 unités vers le bas ; autrement dit, $\mathscr{C}_k$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\vec{i}+3\vec{j}$.

1. Tableau de variation de g :

x	3		5		9		14
$g(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

2. Tableau de variation de h :

x	5		7		11		16
$h(x)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	6

3. Tableau de variation de k :

x	5		7		11		16
$k(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	7	$\searrow$	3