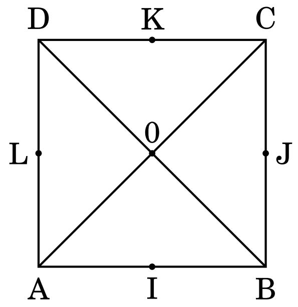
Correction du devoir surveillé n° 9

Exercice 1 :



1. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$ car $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IB}} = \overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{IA}}) = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = -\mathrm{AB}^2 = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = -\dfrac{9}{4}$
3. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AI}}$ car I est le projeté orthogonal de O sur (AB).
   Ainsi : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AI} \times \cos(\overrightarrow{\mathrm{AB}};\overrightarrow{\mathrm{AI}}) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AI} \times \cos(0) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AI} = 3 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$
4. $\overrightarrow{\mathrm{LA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LK}} = \overrightarrow{\mathrm{LA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LD}} = \overrightarrow{\mathrm{LA}} \cdot (-\overrightarrow{\mathrm{LA}}) = -\mathrm{LA}^2 = -\dfrac{9}{4}$
5. $\overrightarrow{\mathrm{KA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{KB}} = (\overrightarrow{\mathrm{KI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{KI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}) = (\overrightarrow{\mathrm{KI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{KI}} - \overrightarrow{\mathrm{IA}}) = \overrightarrow{\mathrm{KI}}^2 - \overrightarrow{\mathrm{IA}}^2$
   $= \mathrm{KI}^2 - \mathrm{IA}^2 = 3^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 9 - \dfrac{9}{4} = \dfrac{36-9}{4} = \dfrac{27}{4}$
6. $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LD}} = 0$ car $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{LD}}$

Exercice 2 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(0;-2)$, $B(5;2)$ et $C(-3;1)$.

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$
   Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5 \times (-3) + 4 \times 3 = -3$
2. $AB = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$
   $AC = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{2}$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$, donc : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$
   $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-3}{\sqrt{41} \times 3\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{82}}$
   On en déduit (en utilisant la calculatrice) : $\cos(\widehat{BAC}) \simeq 96{,}3°$

Exercice 3 :

ABC est un triangle tel que $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 9$.

1. Montrer en utilisant la relation de Chasles que $BC^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$.
   $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2$

2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
   On déduit de la question 1 : $2\overrightarrow{AB} = BA^2 + AC^2 - BC^2$
   Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \dfrac{6^2 + 7^2 - 9^2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
3. En déduire la valeur de $\widehat{BAC}$ arrondie au degré.
   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
   Donc : $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{2}{6 \times 7} = \dfrac{2}{42} = \dfrac{1}{21}$
   On en déduit (en utilisant la calculatrice) : $\cos(\widehat{BAC}) \simeq 87°$

Exercice 4 :

1. $W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$, car les vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux.
2. $W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = AB \times ||\overrightarrow{P}|| \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{P}) = AB \times mg \cos(90° + 23°)$
   $W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{P}) = 80 \times 150 \times 9{,}81 \times \cos(113°)$
   $W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{P}) \simeq -76661$ Joules.
3. $W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{T}) = -W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{P}) \simeq 76661$.
   Or : $W_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = AB \times ||\overrightarrow{T}|| \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{T}) = AB \times T \cos(0°) = 80T$
   Donc : $80T \simeq 76661$, ce qui donne : $T \simeq 958$
   La valeur de T est donc d'environ 958 N.