Mathématiques - Devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

1. $9x^2 + 12x - 5 = 0$
   $\Delta = 12^2 - 4 \times 9 \times (-5) = 324$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-12 + \sqrt{324}}{2 \times 9} = \dfrac{-12 + 18}{18} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$
   $x_2 = \dfrac{-12 - \sqrt{324}}{2 \times 9} = \dfrac{-12 - 18}{18} = \dfrac{-30}{18} = -\dfrac{5}{3}$
   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{5}{3}\,;\frac{1}{3}\right\}}$$

2. $5x^2 - 40x + 80 = 0$
   $\Delta = (-40)^2 - 4 \times 5 \times 80 = 0$
   $\Delta = 0$ donc il y a une seule solution :
   $x_0 = \dfrac{-(-40)}{2 \times 5} = \dfrac{40}{10} = 4$
   $$\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$$

3. $2x^2 + 9x - 5 = 0$
   $\Delta = 9^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = \dfrac{-9 + 11}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
   $x_2 = \dfrac{-9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = \dfrac{-9 - 11}{4} = \dfrac{-20}{4} = -5$
   $$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-5\,;\frac{1}{2}\right\}}$$

4. $5x^2 - 6x + 2 = 0$
   $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 5 \times 2 = -4$
   $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution.
   $$\boxed{\mathscr{S} = \varnothing}$$

Exercice 2 : Résoudre les inéquations suivantes en faisant un tableau de signes :

1. $x^2 - 9x + 14 \geq 0$
   $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 14 = 25$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-(-9) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \dfrac{9 + 5}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$
   $x_2 = \dfrac{-(-9) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \dfrac{9 - 5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
   Le trinôme $x^2 - 9x + 14$ est du signe de a, donc positif, sauf entre les deux racines :

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$x^2 - 9x + 14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On cherche x tel que $x^2 - 9x + 14 \geq 0$, donc $x^2 - 9x + 14$ doit être positif ou nul.
Ainsi, l'ensemble solution est :

$$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;2] \cup [7\,;+\infty[}$$

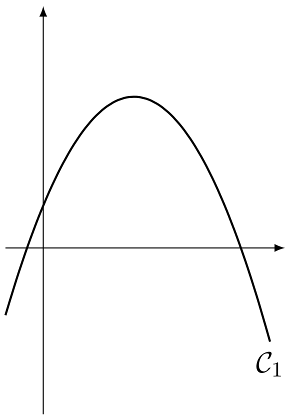
2. $6x^2 - 19x + 10 \leq 0$
   $\Delta = (-19)^2 - 4 \times 6 \times 10 = 121$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-(-19) + \sqrt{121}}{2 \times 6} = \dfrac{19 + 11}{12} = \dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2}$
   $x_2 = \dfrac{-(-19) - \sqrt{121}}{2 \times 6} = \dfrac{19 - 11}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$
   Le trinôme $x^2 - 9x + 14$ est du signe de a, donc positif, sauf entre les deux racines :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 9x + 14$		$+$	0	$-$	0	$+$	

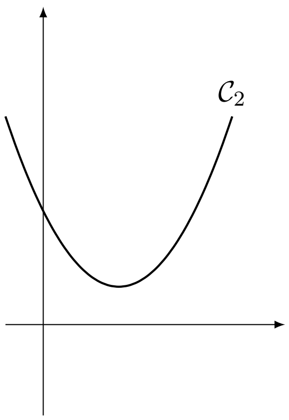
On cherche x tel que $6x^2 - 19x + 10 \leq 0$, donc $6x^2 - 19x + 10$ doit être négatif ou nul.
Ainsi, l'ensemble solution est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{2}{3}\,;\frac{5}{2}\right]}$$

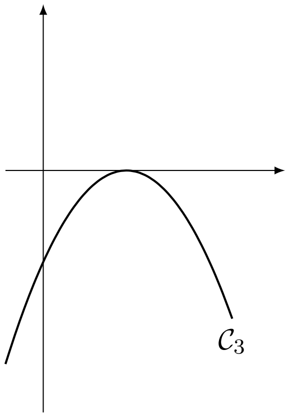
Exercice 3 :



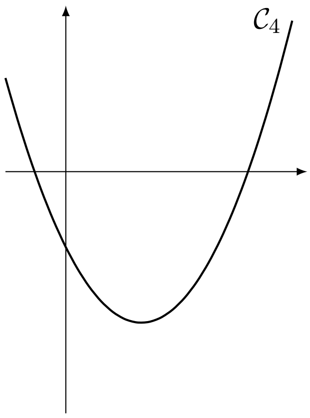
La parabole est tournée vers le bas donc $a < 0$.
Elle traverse deux fois l'axe des abscisses, donc il y a deux racines, donc $\Delta > 0$.



La parabole est tournée vers le haut donc $a > 0$.
Elle ne traverse pas l'axe des abscisses, donc il n'y a pas de racine, donc $\Delta < 0$.



La parabole est tournée vers le bas donc $a < 0$.
Elle est tangente à l'axe des abscisses, donc il y a une racine, donc $\Delta = 0$.



La parabole est tournée vers le haut donc $a > 0$.
Elle traverse deux fois l'axe des abscisses, donc il y a deux racines, donc $\Delta > 0$.

Exercice 4 :

Le périmètre d'un rectangle mesure 12 cm.

1. Soit x la longueur, en cm, de ce rectangle. Dans quel intervalle varie x ?
   x est une longueur, donc $x \geq 0$. D'autre part, le périmètre est plus grand que $2x$, donc $x \leq 6$.
   Ainsi : $\boxed{x \in [0\,;6].}$
   Si on considère que la longueur signifie le plus grand des côtés, alors on peut même préciser que $x \geq 3$.
   Alors $x \in [3\,;6]$.
2. Déterminer la largeur en fonction de x.
   Le périmètre vaut deux largeurs plus deux longueurs. Ainsi : $2\times$largeur$+2x$=12.
   Donc : largeur$+x$=6. On en déduit que la largeur vaut $\boxed{6-x}$.
3. En déduire l'aire $\mathcal{A}(x)$ de ce rectangle en fonction de x.
   L'aire du rectangle est : largeur $\times$ longueur.
   Donc $\boxed{\mathcal{A}(x) = (6-x)\times x = 6x - x^2}$
4. On souhaite que l'aire de ce rectangle soit égale à 5 cm^2.
   On doit donc résoudre l'équation $6x - x^2 = 5$, qui équivaut à : $\boxed{-x^2+6x-5=0}$.
5. Résoudre alors cette équation et en déduire quelles valeurs donner à la longueur et à la largeur.
   On résout : $-x^2+6x-5=0$
   $\Delta = 6^2 - 4\times(-1)\times(-5) = 16$
   $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :
   $$x_1 = \frac{-6+\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-6+4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$
   $$x_2 = \frac{-6-\sqrt{16}}{2\times(-1)} = \frac{-6-4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$
   On doit donc prendre $\boxed{\text{une longueur de 5 cm et une largeur de 1 cm.}}$
6. On cherche à présent la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.
   Dresser le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ et en déduire l'aire maximale et la valeur de x qui permet de l'obtenir.

On calcule : $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{-2} = 3$. Comme $a < 0$, la fonction $\mathcal{A}$ est d'abord croissante puis décroissante (la parabole qui la représente est tournée vers le bas.)
On obtient le tableau :

x	0		3		6
$\mathcal{A}(x)$	0	$\nearrow$	9	$\searrow$	0

Ainsi, l'aire maximale est $\boxed{9 \text{ cm}^2}$; elle est obtenue pour une longueur de $\boxed{3 \text{ cm}}$. Le rectangle est alors un carré de côté 3 cm.