Corrigé du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ montre (avec la précision permise par le graphique) que la fonction f est d'abord croissante sur $[-5\,;1]$ puis décroissante sur $[1\,;4]$, puis à nouveau croissante sur $[4\,;6]$.

   D'après la propriété du cours, on en déduit que sa dérivée f' est positive sur $[-5\,;1]$ puis négative sur $[1\,;4]$, puis à nouveau positive sur $[4\,;6]$.

   La courbe qui correspond à une fonction qui vérifie ces conditions est la courbe $\mathcal{C}_3$. C'est donc la courbe $\mathcal{C}_3$ qui représente la dérivée de f.

2. D'après le cours, $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   Or, on voit que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses ; son coefficient directeur est donc 0.

   Ainsi : $f'(1) = 0$.

   De même, $f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5, c'est à dire T_5.

   On voit que le coefficient directeur de T_5 est $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 4$.

   $\left(\dfrac{\text{« hauteur de la marche »}}{\text{« largeur de la marche »}}\right)$.

   Ainsi : $f'(5) = 4$.

Exercice 2 :

1. $f : f(x) = 3x^7 + 8x^5 + 5x + 3$

   f est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   D'après le cours : $f'(x) = 3 \times 7x^6 + 8 \times 5x^4 + 5$, soit : $f'(x) = 21x^6 + 40x^4 + 5$

2. $g : g(x) = \dfrac{4}{x} - x^7$

   $x \mapsto \dfrac{4}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto x^7$ sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

   Et d'après le cours : $g'(x) = -\dfrac{4}{x^2} - 7x^6$

3. $h : h(x) = \dfrac{5x^2 + 3}{2x - 1}$

   h est une fonction rationnelle, donc dérivable en tout nombre qui n'annule pas le dénominateur ; donc h est dérivable sur : $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty\,; \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}\,; +\infty\right[$

   Posons : $u(x) = 5x^2 + 3$ et $v(x) = 2x - 1$. On en déduit : $u'(x) = 5 \times 2x = 10x$ et $v'(x) = 2$

D'après le cours : $h'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}(x) = \dfrac{10x(2x-1) - (5x^2+3) \times 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{20x^2 - 10x - 10x^2 - 6}{(2x-1)^2}$

Ainsi : $h'(x) = \dfrac{10x^2 - 10x - 6}{(2x-1)^2}$

4. $k(x) = (5x^2 + x)\sqrt{x}$

   k est un produit de deux fonctions, donc dérivable sur l'ensemble où les deux fonctions sont dérivables.

   Le premier facteur est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et le deuxième est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, d'après le cours.

   Donc k est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*} =]0\,;+\infty[$.

   Posons : $u(x) = 5x^2 + x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

   On en déduit : $u'(x) = 5 \times 2x + 1 = 10x + 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

   Alors, d'après le cours : $k'(x) = (u'v + uv')(x) = (10x+1)\sqrt{x} + (5x^2+x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = (10x+1)\sqrt{x} + \dfrac{5x^2+x}{2\sqrt{x}}$

   On réduit au même dénominateur :

   $k'(x) = \dfrac{(10x+1)\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{5x^2+x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(10x+1) \times 2x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{5x^2+x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{20x^2 + 2x + 5x^2 + x}{2\sqrt{x}}$

   Ainsi : $k'(x) = \dfrac{25x^2 + 3x}{2\sqrt{x}}$

5. $l(x) = (3x+2)^{20}$

   l est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Il s'agit d'une fonction composée, et on peut poser : $l(x) = u(ax+b)$, où $a = 3$, $b = 2$ et u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x^{20}$.

   D'après le cours, on en déduit : $l(x) = au'(ax+b) = 3u'(3x+2)$.

   On a : $u'(x) = 20x^{19}$; donc $u'(3x+2) = 20(3x+2)^{19}$.

   Ainsi : $l'(x) = 3 \times 20(3x+2)^{19}$, soit : $l(x) = 60(3x+2)^{19}$.

6. $m(x) = \sqrt{7x+1}$

   m est dérivable sur l'ensemble des x vérifiant : $7x + 1 > 0$ soit : $x > -\dfrac{1}{7}$. Donc m est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{7}\,;+\infty\right[$.

   Comme dans la question précédente, il s'agit d'une fonction composée, et on peut poser : $m(x) = u(ax+b)$, où $a = 7$, $b = 1$ et u est la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $u(x) = \sqrt{x}$.

   D'après le cours, on en déduit : $m(x) = au'(ax+b) = 7u'(7x+1)$.

   On a : $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; donc $u'(7x+1) = \dfrac{1}{2\sqrt{7x+1}}$.

   Ainsi : $m'(x) = 7 \times \dfrac{1}{2\sqrt{7x+1}}$, soit : $m'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x+1}}$.

Exercice 3 :

1. Le volume d'un cylindre se calcule par la formule bien connue : $\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire de la base et h la hauteur.

   Ici : $\mathcal{V} = x^2 \times h$.

   Comme le volume d'une brique est de 1 dm^3, on a : $x^2 \times h = 1$ et donc $h = \dfrac{1}{x^2}$.

2. La base et la face du haut sont des carrés de côtés x, donc leur aire totale est $2x^2$.

   Les faces latérales sont des rectangles de côtés x et h, l'aire de chacun d'eux est xh et comme il y en a 4, l'aire latérale totale est $4xh$.

   Ainsi, l'aire totale des six faces de la brique est $2x^2 + 4xh$.

   Comme on a établi que $h = \dfrac{1}{x^2}$, on trouve en remplaçant : $A(x) = 2x^2 + 4x \times \dfrac{1}{x^2} = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$.

3. A est bien dérivable sur $]0\,;+\infty[$, car c'est une fonction rationnelle de dénominateur x.

   D'après le cours : $A'(x) = 2 \times 2x + 4 \times \dfrac{-1}{x^2} = 4x - \dfrac{4}{x^2}$.

   On réduit au même dénominateur : $A'(x) = \dfrac{4x \times x^2}{x^2} - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 4}{x^2} = \dfrac{4(x^3 - 1)}{x^2}$.

4. 4 étant positif, ainsi que x^2, $A'(x)$ est du signe de $x^3 - 1$.

   On sait d'après le cours de seconde que la fonction cube est strictement croissante (on le retrouve facilement en calculant sa dérivée).

   Donc : $x^3 - 1 \geq 0$ équivaut successivement à :

   $x^3 \geq 1^3$

   $x \geq 1$ (les antécédents sont dans le même ordre que leurs images).

   On en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$A'(x)$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$\searrow$	6	$\nearrow$	

   $A(1) = 2 \times 1^2 + \dfrac{4}{1} = 6$

5. Pour que l'aire totale des six faces soit minimale, d'après le tableau précédent, il faut choisir $x = 1$.

   On a alors : $h = \dfrac{1}{1^2} = 1$. La hauteur de la brique est alors égale au côté de la base ; autrement dit, la brique est un cube.