Correction du devoir surveillé n° 6

Exercice 1 :

Rappel des formules :

$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad (\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$

$A = (\mathrm{e}^x)^2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$

$A = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2x}$

$A = 0$

$B = \left(\mathrm{e}^{4x} \times \mathrm{e}^{-x}\right)^2$

$B = \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2$

$B = \mathrm{e}^{6x}$

$C = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$

$C = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

$C = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{-x}$

$C = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}$

$D = \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{-x+2}}$

$D = \mathrm{e}^{2x+1} \times \mathrm{e}^{x-2}$

$D = \mathrm{e}^{2x+1+x-2}$

$D = \mathrm{e}^{3x-1}$

Exercice 2 :

Rappel : Si $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b$ alors $a = b$; si $\mathrm{e}^a \leq \mathrm{e}^b$ alors $a \leq b$, etc.

a) $\mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{x^2}$

équivalent à : $4x = x^2$

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0$ ou $x = 4$ $\qquad \mathscr{S} = \{0\,;4\}$

b) $\mathrm{e}^5 \times (\mathrm{e}^x)^3 = 1$

$\mathrm{e}^5 \times \mathrm{e}^{3x} = 1$

$\mathrm{e}^{5+3x} = 1$

$\mathrm{e}^{5+3x} = \mathrm{e}^0$

$5 + 3x = 0$

$x = -\dfrac{5}{3} \qquad \mathscr{S} = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

c) $e^{3x} \leq \dfrac{e^5}{e^x}$

$e^{3x} \leq e^{5-x}$

$3x \leq 5 - x$

$4x \leq 5$

$x \leq \dfrac{5}{4}$ $\qquad\qquad$ $\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\dfrac{5}{4}\right]$

d) $e^{5x+3} \leq -2$

On sait que l'image d'un nombre réel quelconque par la fonction exponentielle est un réel strictement positif. Par conséquent, l'inéquation précédente n'a aucune solution. $\qquad$ $\mathscr{S} = \varnothing$

Exercice 3 :

1. $f : f(x) = 5\sqrt{x} + 3\,e^x \qquad I =]0\,;+\infty[$

   D'après le cours :

   $f'(x) = 5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 3e^x$

   $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + 3e^x$

2. $g : g(x) = x^3 \times e^x \qquad I = \mathbb{R}$

   On pose : $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^x$

   On en déduit : $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = e^x$

   Ainsi : $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x$

   $g'(x) = (3x^2 + x^3)\,e^x$

3. $h : h(x) = e^{3x+1} \qquad I = \mathbb{R}$

   $h(x) = u(3x+1)$ où u est la fonction exponentielle. Donc h est de la forme $h(x) = u(ax+b)$ (où a et b sont deux réels).

   D'après le cours : $h'(x) = au'(ax+b)$.

   Ici : $u'(x) = e^x$ donc $h'(x) = 3e^{3x+1}$.

Exercice 4 :

1. On pose : $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$

   On en déduit : $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = e^x$

   Ainsi : $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2}$

   $f'(x) = \dfrac{(2x - x^2)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{x(2-x)e^x}{(e^x)^2}$

   On simplifie par e^x :

   $f'(x) = \dfrac{x(2-x)}{e^x} \qquad$ soit : $\qquad f'(x) = -\dfrac{x(x-2)}{e^x}$
2. On sait que e^x est toujours positif ; on s'occupe donc du signe du numérateur de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$	$\searrow$	

3. D'après le tableau, le maximum sur $[0;+\infty[$ est obtenu pour $x=2$.

   On calcule : $f(2)=\dfrac{2^2}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\simeq 0{,}54$.

4. D'après le cours, l'équation de la tangente en 1 à $\mathscr{C}$ est : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$.

   On a : $f(1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $f'(1)=-\dfrac{1\,(1-2)}{\mathrm{e}^1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

   Donc : $T : y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}(x-1)+\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

   $T : y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}x$

   C'est l'équation d'une droite qui passe par l'origine.

5. On obtient le graphique suivant.