Correction du devoir surveillé nº8

Exercice 1 :

1) L'image de $-\sqrt{\pi}$ par la fonction « carré » est :			
a) π	b) $-\pi$	c) π^2	d) n'existe pas
2) L'image de 10^{250} par la fonction « carré » est :			
a) 10^{252}	b) 10^{62500}	c) 10^{500}	d) n'existe pas
3) L'image de 10^{250} par la fonction « inverse » est :			
a) $\frac{1}{10^{250}}$	b) 10^{-250}	c) 10^{249}	d) n'existe pas
4) Soient $a = -1{,}000000000000001$ et $b = -1{,}000000000000000001$. On peut affirmer que :			
a) $a^2 < b^2$	b) $a^2 > b^2$	c) $a^2 = b^2$	d) $a^2 < -b^2$
5) Pour les mêmes valeurs de a et b, on peut affirmer que :			
a) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	b) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	c) $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	d) $a = \frac{1}{b}$
6) L'ensemble solution de l'inéquation $x^2 \leqslant 5$ est :			
a) $]-\infty\ ;\ 25]$	b) $[-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}]$	c) $[0\ ;\ 25]$	d) $[0\ ;\ \sqrt{5}]$
7) L'ensemble solution de l'inéquation $x^2 < -1$ est :			
a) $\varnothing$ (pas de solution)	b) $]-\infty\ ;\ -1[$	c) $]0\ ;\ -1[$	d) $]-1\ ;\ 1[$
8) L'ensemble solution de l'inéquation $\frac{1}{x} > 2$ est :			
a) $]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$	b) $]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty[$	c) $]-\infty\ ;\ \frac{1}{2}[$	d) $]0\ ;\ \frac{1}{2}[$
9) L'ensemble solution de l'inéquation $\frac{1}{x} < 5$ est :			
a) $\varnothing$ (pas de solution)	b) $]-\infty\ ;\ \frac{1}{5}[$	c) $]0\ ;\ \frac{1}{5}[$	d) $]-\infty\ ;\ 0[\cup]\frac{1}{5}\ ;\ +\infty[$
10) L'encadrement : $-2 \leqslant x \leqslant 3$ implique :			
a) $x^2 \in [4\ ;\ 9]$	b) $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}$	c) $x^2 \in [0\ ;\ 9]$	d) $x^2 \in [-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}]$

Justifications :

1. $\left(-\sqrt{\pi}\right)^2 = \sqrt{\pi}^2 = \pi$. NB : un carré est toujours positif.

2. On sait que $(a^n)^p = a^{n\times p}$ donc $(10^{250})^2 = 10^{250\times 2} = 10^{500}$.

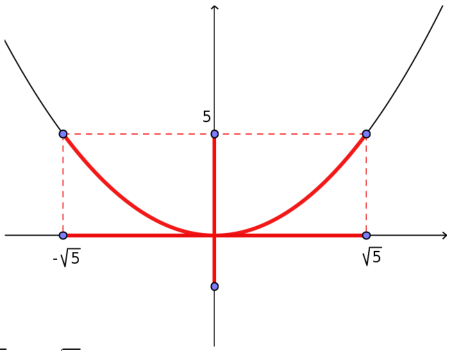
3. On sait que $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ donc $\frac{1}{10^{250}} = 10^{-250}$.

4. On a d'abord : $1{,}000000000000000001 < 1{,}000000000000001$ (on le voit bien lorsque les deux nombres sont écrits l'un au-dessous de l'autre.)
   Par conséquent, en multipliant par (–1) :
   $-1{,}000000000000000001 > -1{,}000000000000001$
   Autrement dit : $b > a$. Le plus dur est fait.
   Comme a et b sont négatifs, et que la fonction « carré » est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$, alors a^2 et b^2 sont rangés dans l'ordre inverse de a et b.
   Comme $a < b$, on en déduit : $a^2 > b^2$.

5. On sait que la fonction « inverse » est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, donc $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$ sont rangés dans l'ordre inverse de a et b.

   Comme $a < b$, on en déduit : $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

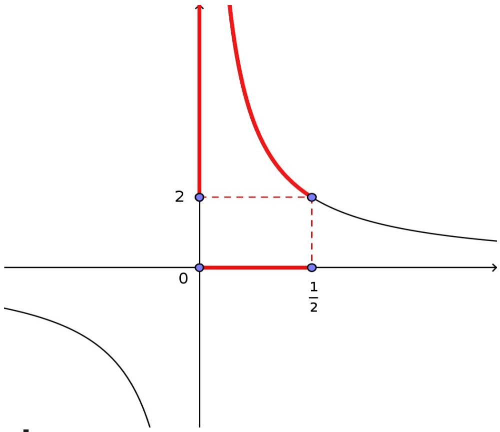
6. On fait un dessin :



   L'ensemble solution est $[-\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{5}\,]$.

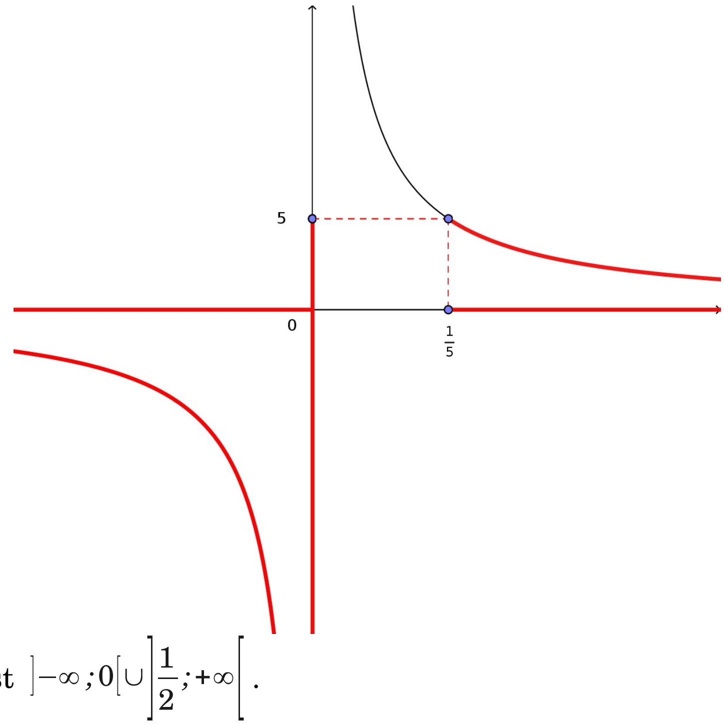
7. Un carré est toujours positif, donc quelle que soit la valeur de x, x^2 ne peut pas être inférieur à -1.

8. On fait un dessin :



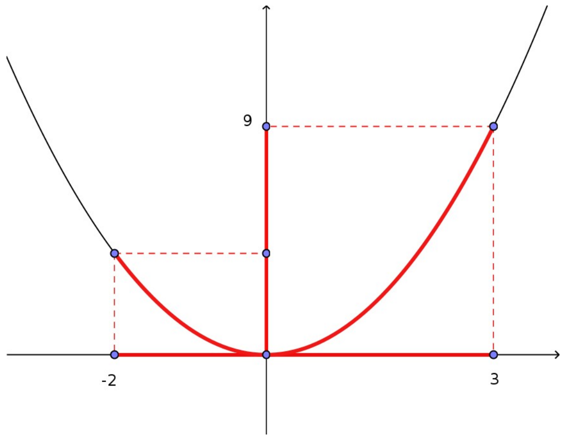
   L'ensemble solution est $\left]0\,;\dfrac{1}{2}\right[$.

9. Encore un dessin :



   L'ensemble solution est $]-\infty\,;0[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

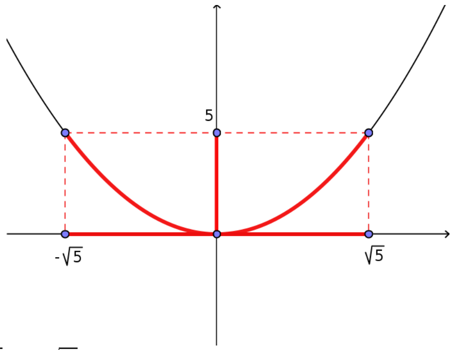
10. Un dessin :



On voit que $x^2 \in [0 ; 9]$.

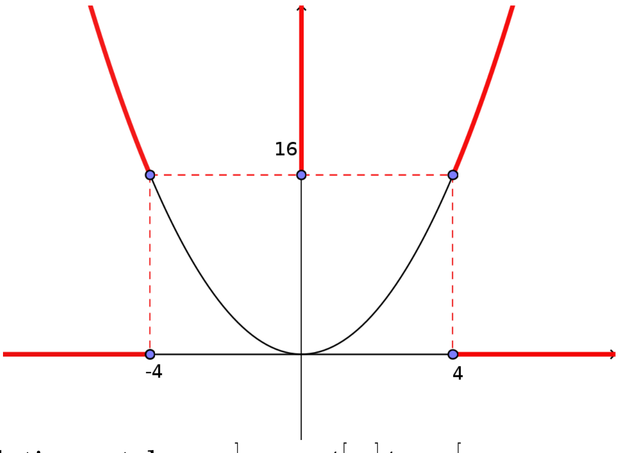
Exercice 2 :

1. Donner le meilleur encadrement possible de x^2 lorsque $x \in [-\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$.
   On procède de la manière habituelle :



On voit que lorsque $x \in [-\sqrt{5} ; \sqrt{5}]$, $\underline{x^2 \in [0 ; 5]}$.

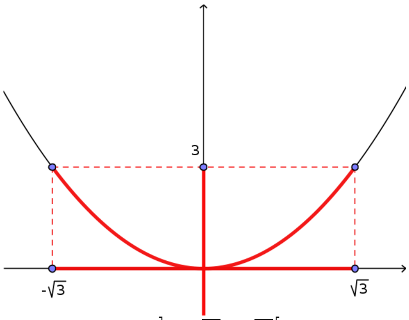
2. *a)* $x^2 \geq 16$
   On fait un dessin :



L'ensemble solution est donc : $]-\infty ; -4[\cup]4 ; +\infty[$.

$b)$ $x^2 \leq 3$

Le dessin :

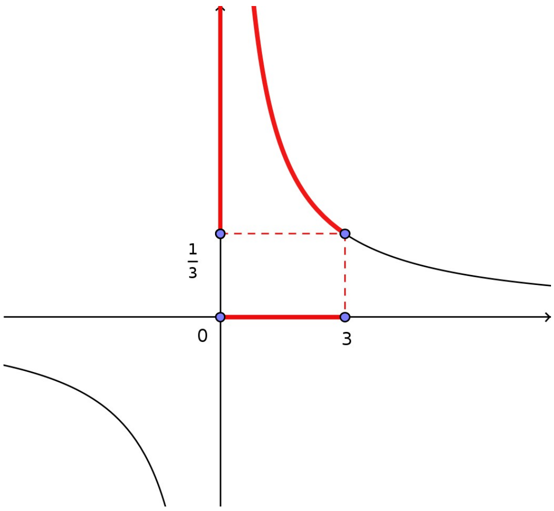


L'ensemble solution est donc : $\left]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\right[$.

Exercice 3 :

$a)$ $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{3}$

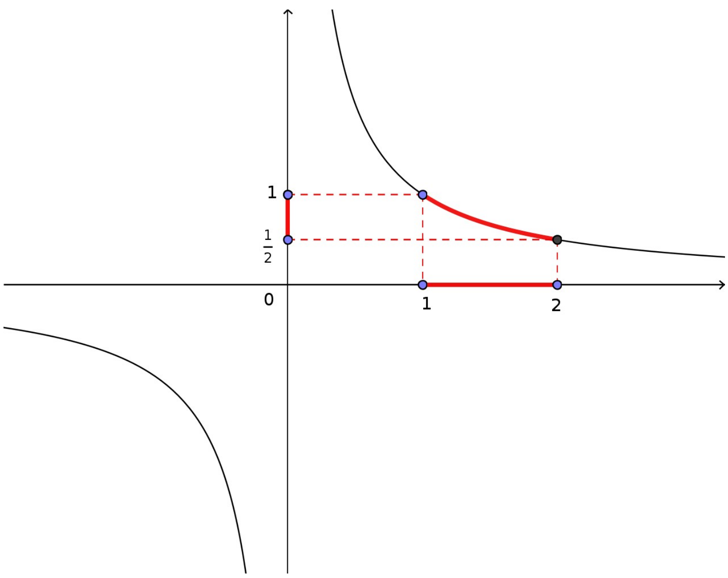
Le dessin :



L'ensemble solution est donc :]0 ; 3].

$b)$ $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$

Le dessin :



L'ensemble solution est donc : [1 ; 2].

Exercice 4 :

1. Commençons par encadrer $\frac{5}{x}$. On sait que la fonction inverse est décroissante sur]0 ; +∞[.
   Comme $1 \leqslant x \leqslant 10$ alors les trois nombres 1, x et 10 sont positifs.
   Donc leurs images sont dans l'ordre inverse : $\frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{10}$ soit : $0,1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1$.
   On multiplie la ligne par 5, ce qui ne change pas le sens des inégalités puisque 5 est positif. Cela donne : $0,5 \leqslant \frac{5}{x} \leqslant 5$.

   Encadrons à présent $\frac{x}{5}+1$.

   Comme $1 \leqslant x \leqslant 10$, alors $\frac{1}{5} \leqslant \frac{x}{5} \leqslant \frac{10}{5}$ (on a divisé par un nombre positif, donc on garde le même sens.) Cela s'écrit aussi : $0,2 \leqslant \frac{x}{5} \leqslant 2$.

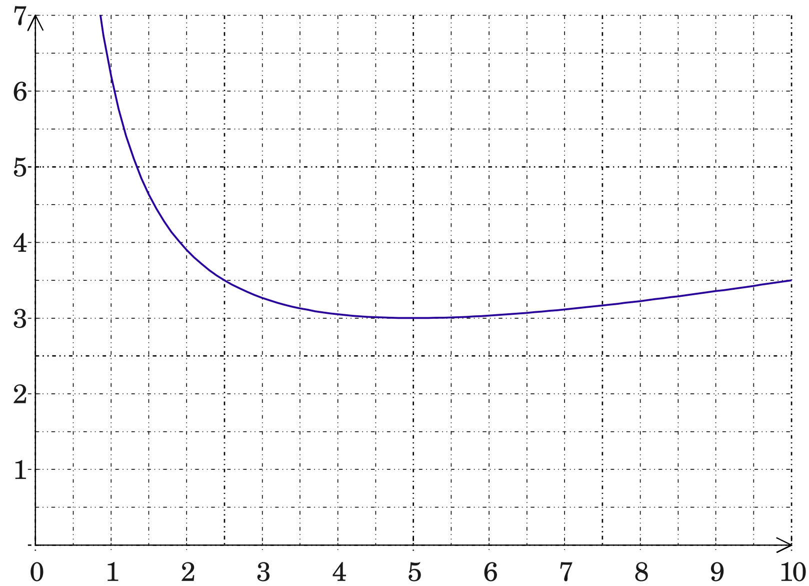
   Comme $0,2 \leqslant \frac{x}{5} \leqslant 2$, alors en ajoutant 1, on obtient : $1,2 \leqslant \frac{x}{5}+1 \leqslant 3$.

   Résumons. On a : $0,5 \leqslant \frac{5}{x} \leqslant 5$ et $1,2 \leqslant \frac{x}{5}+1 \leqslant 3$.

   On en déduit : $0,5+1,2 \leqslant \frac{5}{x}+\frac{x}{5}+1 \leqslant 5+3$ soit : $1,7 \leqslant C(x) \leqslant 8$.
   Le coût moyen est bien compris entre 1,7 et 8.

2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C(x)$	6,2	3,9	3,27	3,05	3	3,03	3,11	3,23	3,36	3,5



3. D'après le graphique, le minimum de la fonction est 3 ; il est atteint pour x = 3.
   La quantité à produire pour que le coût soit minimal est donc 5 kg. Le coût moyen minimal correspondant est 3 000 euros.