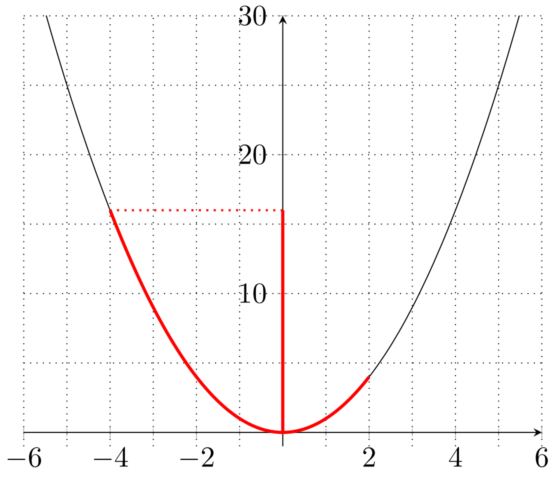
Corrigé du devoir surveillé n° 8

Exercice 1 :

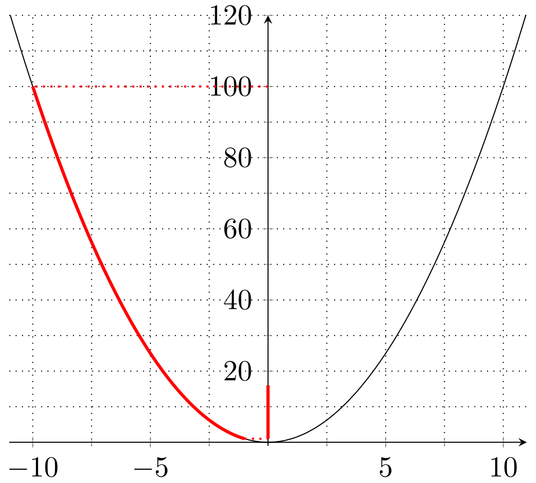
1. Donner le meilleur encadrement possible de x^2 lorsque :

   a) $-4 \leq x \leq 2$



On voit grâce au graphique que : $\boxed{0 \leq x^2 \leq 16}$.

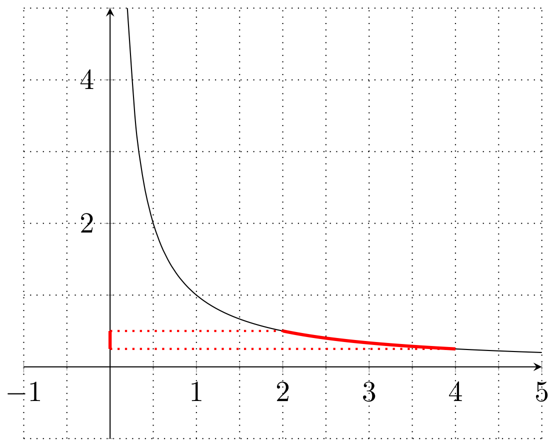
   b) $-10 \leq x \leq -1$



On voit grâce au graphique que : $\boxed{1 \leq x^2 \leq 100}$.

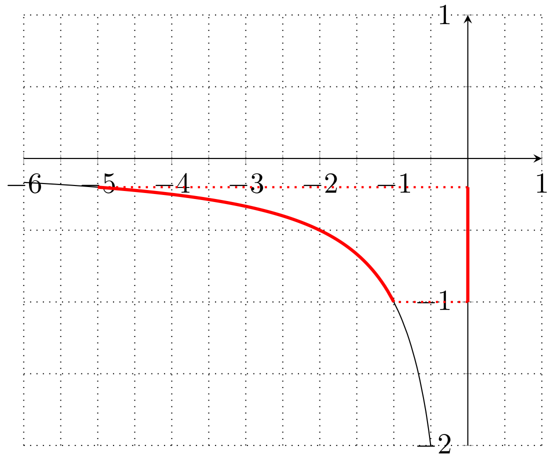
2. Donner le meilleur encadrement possible de $\frac{1}{x}$ lorsque :

   a) $2 \leq x \leq 4$



On voit grâce au graphique que : $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$.

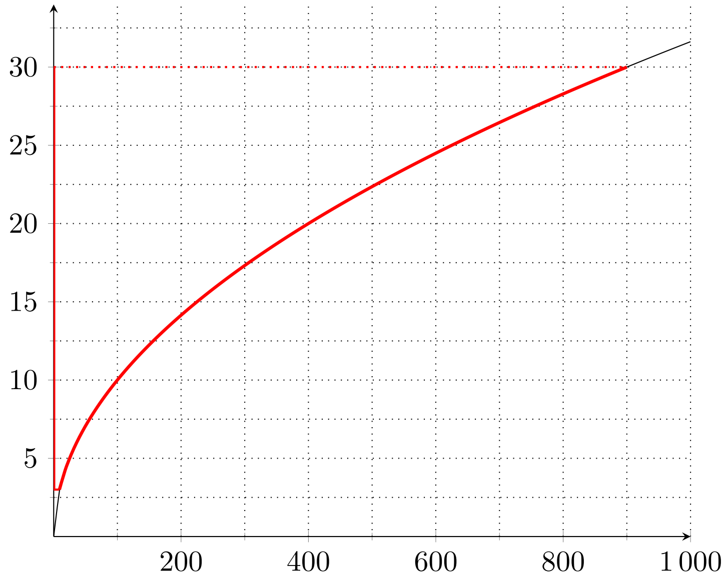
b) $-5 \leq x \leq -1$



On voit grâce au graphique que : $-1 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{5}$.

3. Donner le meilleur encadrement possible de $\sqrt{x}$ lorsque :

a) $9 \leq x \leq 900$



On voit grâce au graphique que : $\boxed{3 \leq \sqrt{x} \leq 30}$.

Comme on sait que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut ici se passer de graphique : on sait que le sens des inégalités ne change pas.

b) $1 \leq x \leq 10$

On sait que le sens des inégalités ne change pas (comme précédemment), donc : $\boxed{1 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{10}}$.

4. Donner le meilleur encadrement possible de x^3 lorsque :

a) $10^{200} \leq x \leq 10^{500}$

Comme on sait que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, on peut ici se passer de graphique : on sait que le sens des inégalités ne change pas.

On obtient : $(10^{200})^3 \leq x^3 \leq (10^{500})^3$.

Ce qui s'écrit aussi : $\boxed{10^{600} \leq x^3 \leq 10^{1500}}$.

b) $-\dfrac{1}{3} \leq x \leq -\dfrac{1}{7}$

Même raisonnement.

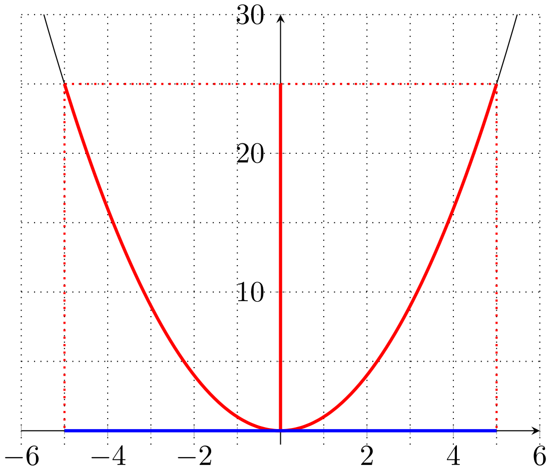
On obtient : $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 \leq \left(-\dfrac{1}{7}\right)^3$.

C'est à dire : $\boxed{-\dfrac{1}{9} \leq x^3 \leq -\dfrac{1}{343}}$.

Exercice 2 :

Résoudre les inéquations suivantes (on peut utiliser un graphique) :

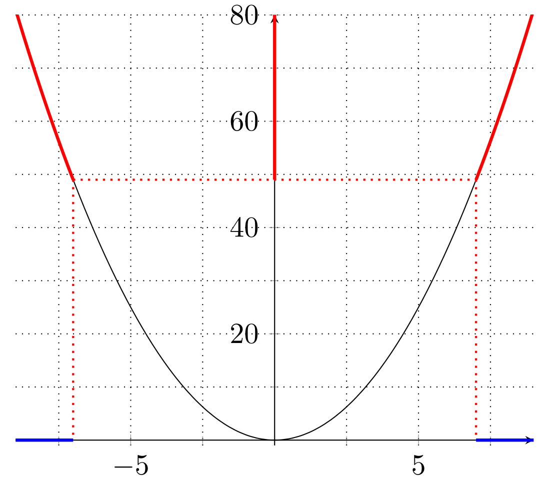
1. $x^2 \leq 25$



On voit grâce au graphique que : $-5 \leq x \leq 5$.

L'ensemble solution est donc : $\boxed{\mathcal{S} = [-5\,;5]}$.

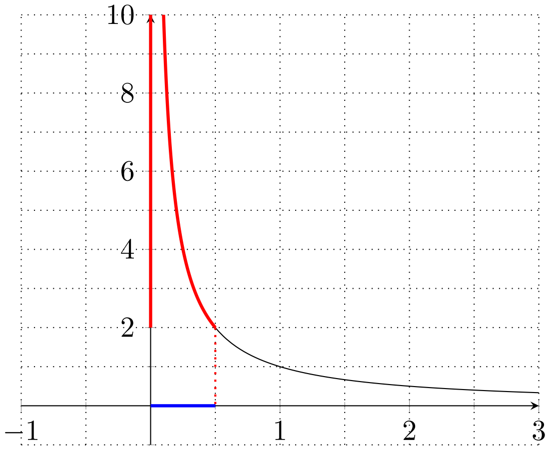
2. $x^2 \geq 49$



On voit grâce au graphique que : $x \leq -7$ ou $x \geq 7$.

L'ensemble solution est donc : $\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;-7] \cup [7\,;+\infty[}$.

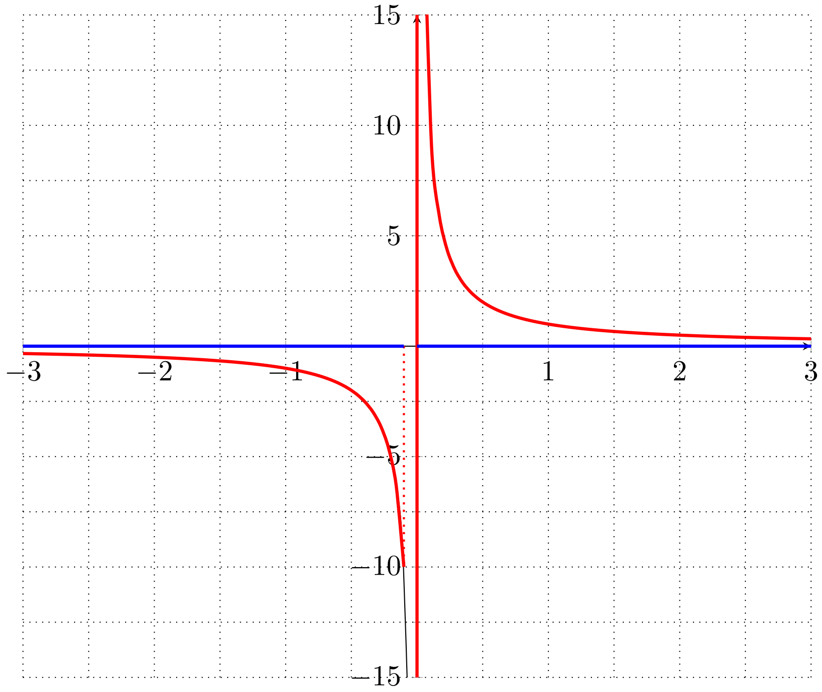
3. $\dfrac{1}{x} \geq 2$



On voit grâce au graphique que : $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$.

L'ensemble solution est donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left]0\,;\dfrac{1}{2}\right]}$.

4. $\dfrac{1}{x} \geq -10$



On voit grâce au graphique que : $x \leq -\dfrac{1}{10}$ ou $x > 0$.

L'ensemble solution est donc : $\mathcal{S} = \left]-\infty\,; -\dfrac{1}{10}\right] \cup \left]0\,;+\infty\right[$.

5. $\sqrt{x} \leq 81$

   Comme on sait que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut ici se passer de graphique : on sait que le sens des inégalités ne change pas.

   Comme $81^2 = 6561$, l'inégalité de l'énoncé est équivalente à : $\sqrt{x} \leq \sqrt{6561}$

   et donc : $0 \leq x \leq 6561$ (on précise que $x > 0$ car la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.)

   L'ensemble solution est donc : $\mathcal{S} = [0\,; 6561]$.

6. $x^3 \geq -27$

   On sait que $(-3)^3 = -27$; l'inégalité de l'énoncé peut donc s'écrire : $x^3 \geq (-3)^3$

   Comme on sait que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, on peut ici aussi se passer de graphique : on sait que le sens des inégalités ne change pas.

   On obtient : $x \geq -3$

   L'ensemble solution est donc : $\mathcal{S} = [-3\,;+\infty[$.

Exercice 3 :

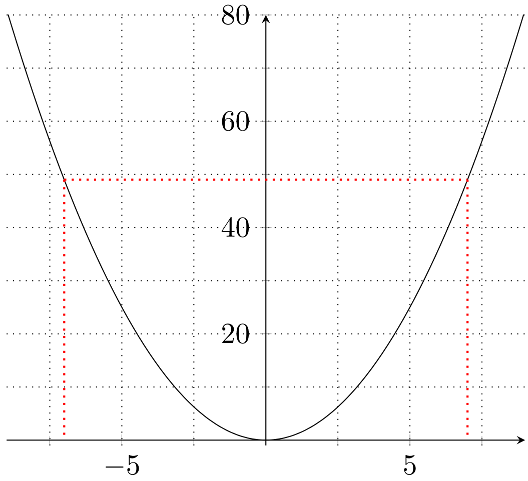
1. Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble donné :

   a) $(2x+3)^2 = 49$ dans $\mathbb{R}$

      Posons $y = 2x + 3$.

      L'énoncé s'écrit alors : $y^2 = 49$.

      On sait qu'une équation de la forme $y^2 = \ldots$ (une valeur) a souvent deux solutions. Un petit dessin permet de le vérifier :



On voit donc que $y^2 = 49$ si $y = -7$ ou si $y = 7$.

On remplace y par $2x + 3$ et on résout les deux équations obtenues :

$2x + 3 = -7$	$2x + 3 = 7$
$2x = -7 - 3$	$2x = 7 - 3$
$2x = -10$	$2x = 4$
$x = -\dfrac{10}{2}$	$x = \dfrac{4}{2}$
$x = -5$	$x = 2$

L'équation a donc deux solutions : $x = -5$ et $x = 2$.

b) $\dfrac{1}{x-1} = \dfrac{5}{3}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Les deux nombres $\dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{5}{3}$ étant égaux, leurs inverses sont égaux.

L'inverse de $\dfrac{1}{x-1}$ est $x - 1$ et l'inverse de $\dfrac{5}{3}$ est $\dfrac{3}{5}$.

On obtient ainsi : $x - 1 = \dfrac{3}{5}$.

$x = \dfrac{3}{5} + 1$

$x = \dfrac{3}{5} + \dfrac{5}{5}$

$x = \dfrac{8}{5}$

L'équation a donc pour solution : $x = \dfrac{8}{5}$, ou si on préfère : $x = 1{,}6$.

2. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$:

$\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}} > 1$

Les deux nombres sont positifs ; leurs inverses sont donc rangés dans l'ordre contraire.

On obtient donc : $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{5} < \dfrac{1}{1}$

soit : $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{5} < 1$

Ensuite, on se débarrasse du 5 en faisant l'opération contraire de l'autre côté du signe égal :
$\sqrt{x^2+1} < 5$ (on n'a pas changé le sens de l'inégalité car on multiplie par un nombre positif).

À partir de l'inéquation de l'énoncé, on peut utiliser aussi un produit en croix, en remarquant qu'on multiplie par $\sqrt{x^2+1}$ qui est un nombre positif (c'est une racine carrée) ; donc le sens de l'inégalité est conservé.

On obtient : $5 > 1 \times \sqrt{x^2+1}$ qui est équivalent à $\sqrt{x^2+1} < 5$.

$\sqrt{x^2+1} < 5$ s'écrit aussi : $\sqrt{x^2+1} < \sqrt{25}$

Comme la fonction racine carrée est strictement croissante, l'ordre est conservé (avec la même inégalité stricte).

Les antécédents sont donc dans le même ordre, c'est à dire : $x^2+1 = 25$.

Ceci équivaut à : $x^2 = 25 - 1$

soit : $x^2 = 24$.

On sait qu'une équation de ce type a en général deux solutions (même raisonnement que dans la question 1a).

On obtient donc deux solutions : $x = -\sqrt{24}$ et $x = \sqrt{24}$.