Corrigé du devoir maison

Note préliminaire :

En géométrie, il peut y avoir beaucoup de façon de rédiger une démonstration. Par conséquent, ce corrigé n'est pas ce qu'il faudrait écrire au mot près. Ce sont les idées qui doivent être présentes.

1) Pour prouver que les droites (KI) et (DB) sont sécantes, il faut expliquer d'abord qu'elles sont coplanaires et ensuite qu'elles ne sont pas parallèles.

   I appartient à (AB), donc aussi au plan (ADB).
   K appartient à (AD), donc aussi au plan (ADB).
   Comme le plan (ADB) contient K et I, il contient toute la droite (KI), d'après le cours.

   D'autre part, (ADB) contient D et B, et donc aussi toute la droite (DB).

   Les droites (KI) et (DB) sont incluses toutes les deux dans le plan (ADB), donc elles sont coplanaires.

   La droite (KI) passe par le milieu de [AB]. Si elle était parallèle à (DB), d'après le théorème des milieux, elle passerait par le milieu de [AD]. Or ceci est faux car le point K, intersection de (KI) et [AD], n'est pas le milieu de [AD]. Donc (KI) n'est pas parallèle à (DB).

   Ainsi, les droites (KI) et (DB) sont coplanaires mais pas parallèles. Elles sont donc sécantes.

   On applique la même méthode pour (KJ) et (DC). Ces deux droites sont incluses dans le plan (ACD) et elles ne sont pas parallèles car K n'est pas le milieu de [AD]. Donc elles sont sécantes.

2) Pour montrer que (MN) est l'intersection des plans (IJK) et (BCD), on commence par montrer que chacun des points M et N appartient à ces deux plans.

   M appartient à (IK), et (IK) est incluse dans le plan (IJK). Donc M appartient à (IJK).
   M appartient à (BD), et (BD) est incluse dans le plan (BCD). Donc M appartient à (BCD).
   M appartient ainsi à la fois à (IJK) et à (BCD).
   Par conséquent, M appartient à l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

   Même raisonnement pour N.
   N appartient à (KJ), donc aussi à (IJK).
   N appartient à (CD) donc aussi à (BCD).
   Donc N appartient à l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

   On sait que (IJK) et (BCD) sont sécants puisqu'ils ne sont ni disjoints ni confondus.
   Or, d'après le cours, l'intersection de deux plans sécants est une droite.

   L'intersection de (IJK) et (BCD) est donc une droite qui contient le point M et le point N. C'est donc la droite (MN).

3) Démontrons pour commencer que (IJ) est parallèle à (BC).
   On applique le théorème des milieux dans le triangle ABC. La droite (IJ) passe par le milieu des côtés [AB] et [AC]. Donc elle est parallèle au troisième côté [BC].

   (IJ) est parallèle à (BC), et (BC) est incluse dans (BCD). D'après la propriété 1 du cours, on en déduit que (IJ) est elle aussi parallèle au plan (BCD).
   On peut préciser ici : (IJ) est parallèle et *distincte* de (BCD). En effet, (IJ) ne peut pas être incluse dans (BCD), car le point I, par exemple, n'appartient pas à (BCD).

4) Les plans (IJK) et (BCD) sont sécants en (MN) (d'après la question 2.)
(IJ) est incluse dans (IJK).
(BC) est incluse dans (BCD).
(IJ) et (BC) sont parallèles (d'après la question 3.)

D'après le théorème « du toit », (MN) est donc parallèle à (IJ).