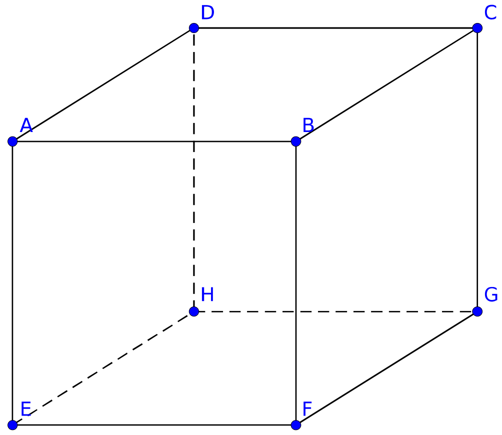
MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº7

Exercice 1 :



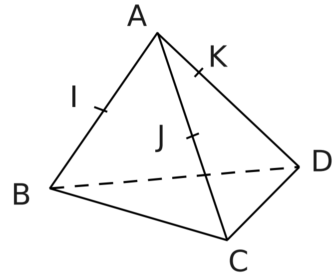
1) (ADE) et (BGC) sont		
sécants	confondus	parallèles non confondus
2) (AF) et (DG) sont		
parallèles	sécantes	non coplanaires
3) (FC) et (GE) sont		
non coplanaires	parallèles	sécantes
4) (AG) et (BH) sont		
parallèles	sécantes	non coplanaires
5) (AH) est		
sécante à (EFC)	parallèle à (EFC) mais non incluse dans (EFC)	incluse dans (EFC)
6) (ABG) et (EFC) sont		
sécants	confondus	parallèles non confondus

Exercice 2 :

1. **Calcul de SH.**
   Comme la pyramide est régulière, le triangle ASC est isocèle, donc ASH est rectangle en H.
   Comme on connaît SA, il suffit de calculer AH pour trouver SH.
   La base ABCD est un carré, donc le triangle ABC est rectangle en B. On peut donc calculer AC, ce qui nous donnera AH.
   Appliquons ainsi le théorème de Pythagore dans le triangle ABC :
   $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$.
   Donc $AH=\frac{AC}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=\sqrt{\frac{32}{4}}=\sqrt{8}$.
   Appliquons à présent le théorème de Pythagore dans le triangle ASH, rectangle en H :
   $SA^2 = AH^2 + SH^2$ donc $5^2=\sqrt{8}^2+SH^2$ donc $SH^2=25-8=17$.
   Donc, $SH=\sqrt{17}$. En arrondissant au 1/10e : **SH mesure environ 4,1 cm.**

2. **Calcul du volume.**
   La formule est : $V=\frac{A\times h}{3}$. On connaît la hauteur h = SH. Il faut calculer l'aire de la base, A.
   Comme la base est un carré, A = côté × côté = 4 × 4 =16.
   On obtient : $V=\frac{16\times\sqrt{17}}{3}$ soit $V\simeq\frac{16\times 4{,}1}{3}\simeq 22$.
   Conclusion : **le volume de la pyramide est d'environ 22 cm³.**

Exercice 3 :



1. Démontrons d'abord que (KI) et (DB) sont coplanaires :
   B et D appartiennent au plan (ADB) par définition.
   K appartient à (AD), donc à (ADB).
   I appartient à (BA), donc à (ADB).
   Comme (ADB) contient K et I, il contient aussi la droite (KI), d'après la propriété 2 du résumé.
   Les droites (BD) et (KI) étant incluses dans le plan (ABD), elles sont coplanaires.
   Or, on sait d'après l'énoncé qu'elles ne sont pas parallèles.
   Comme elles sont coplanaires mais non parallèles, alors elles sont sécantes.

2. Démontrons d'abord que chacun des points P et R appartient aux deux plans (IJK) et (BDC).
   P appartient à (KI) donc aussi à (IJK).
   P appartient à (DB) donc aussi à (BCD).
   Donc P appartient à l'intersection de (IJK) et (BCD).
   R appartient à (KJ) donc à (IJK).
   R appartient à (CD) donc à (BCD).
   Donc R appartient à l'intersection des plans (IJK) et (BCD).

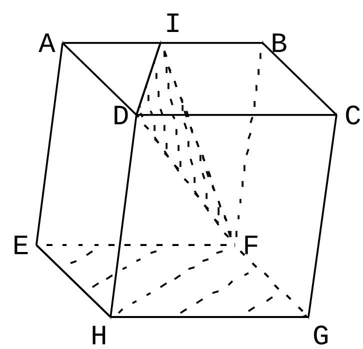
   Les deux plans (IJK) et (BCD) ne sont pas confondus, car, par exemple, le point I appartient à (IJK) mais pas à (BCD).
   Ils ne sont pas non plus parallèles disjoints, car le point P appartient aux deux.
   Donc ils sont sécants. Leur intersection est une droite (propriété 3), et cette droite contient les point P et R. Donc, c'est la droite (PR).

3. Dans le triangle ABC, la droite (IJ) passe par les milieux des côtés [AB] et [AC]. D'après le théorème des milieux, on en déduit qu'elle est parallèle au troisième côté.
   Ainsi, (IJ) est bien parallèle à (BC).

4. La droite (IJ) est incluse dans le plan (IJK).
   La droite (BC) est incluse dans le plan (BCD).
   Les plans (IJK) et (BCD) sont sécants.
   Les droites (IJ) et (BC) sont parallèles (d'après la question 3).

   Donc, d'après le « théorème du toit » (propriété 13), ces deux droites sont parallèles à la droite d'intersection de (IJK) et (BCD), qui est (PR).
   Ainsi, (IJ) et (PR) sont parallèles.

Exercice 4 :



1. F appartient à (DFI) et à (EFG), par définition. Donc il appartient à la droite d'intersection de ces deux plans, c'est à dire Δ.
2. Les plans (DIF) et (ABC) sont sécants, car F, par exemple, n'appartient pas à (ABC).
   Leur intersection est donc une droite (propriété 3).
   Or, le point D appartient aux deux plans et I aussi.
   Donc l'intersection de (DIF) et (ABC) est la droite (DI).
3. Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, car ils correspondent à deux faces opposées du cube.
   Le plan (DIF) est donc sécant à deux plans parallèles, (ABC) et (EFG).
   D'après la propriété 5, on en déduit que les droites d'intersections sont parallèles. Ainsi, les droites (DI) et Δ sont parallèles.
   On sait que Δ est parallèle à (DI) et qu'elle passe par F (d'après la question 1).
   Donc, Δ est la droite parallèle à (DI) passant par F.