Corrigé du devoir surveillé nº4

Exercice 1 :

1) L'ensemble solution de l'inéquation $2x + 1 \leqslant 9$ est :			
a) $]-\infty ; 4[$	b) $]-\infty ; 4]$	c) $]4 ; +\infty[$	d) $[4 ; +\infty[$
2) L'ensemble solution de l'inéquation $2x - 6 \leqslant 5x$ est :			
a) $[-2 ; +\infty[$	b) $]-\infty ; -2[$	c) $]-\infty ; -2]$	d) $[2 ; +\infty[$
3) L'ensemble solution de l'inéquation $2x < 0$ est :			
a) $]-\infty ; -2]$	b) $]-\infty ; -2[$	c) $]-\infty ; \frac{1}{2} [$	d) $]-\infty ; 0[$
4) L'ensemble solution de l'inéquation $x \leqslant -x$ est :			
a) $\varnothing$ (pas de solution)	b) $]-\infty ; 0]$	c) $[-1 ; 1]$	d) $]-\infty ; +\infty[$
5) L'encadrement : $1 \leqslant x < 3$ se traduit par :			
a) $x \in]1 ; 3[$	b) $x \in [1 ; 3[$	c) $x \in]1 ; 3]$	d) $x \in [1 ; 3]$

Exercice 2 :

1. Résoudre l'inéquation $(2x - 5)(-3x - 1) \geqslant 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $(2x - 5)$		–		–	0	+	
Signe de $(-3x - 1)$		+	0	–		–	
Signe de $(2x - 5)(-3x - 1)$		–	0	+	0	–	

$(2x - 5)(-3x - 1)$ doit être positif (éventuellement nul).

L'ensemble solution est donc : $S = \left[-\frac{1}{3} ; \frac{5}{2}\right]$ ou $\left[-\frac{1}{3} ; 2{,}5\right]$.

2. Résoudre l'inéquation $\frac{2x-1}{1-x} < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
Signe de $(2x - 1)$		–	0	+		+	
Signe de $(1 - x)$		+		+	0	–	
Signe de $\frac{2x-1}{1-x}$		–	0	+	$\parallel$	–	

$\frac{2x-1}{1-x}$ doit être strictement négatif (donc différent de 0.)

L'ensemble solution est donc : $S = \left[-\infty ; \frac{1}{2}\right] \cup [1 ; +\infty]$.

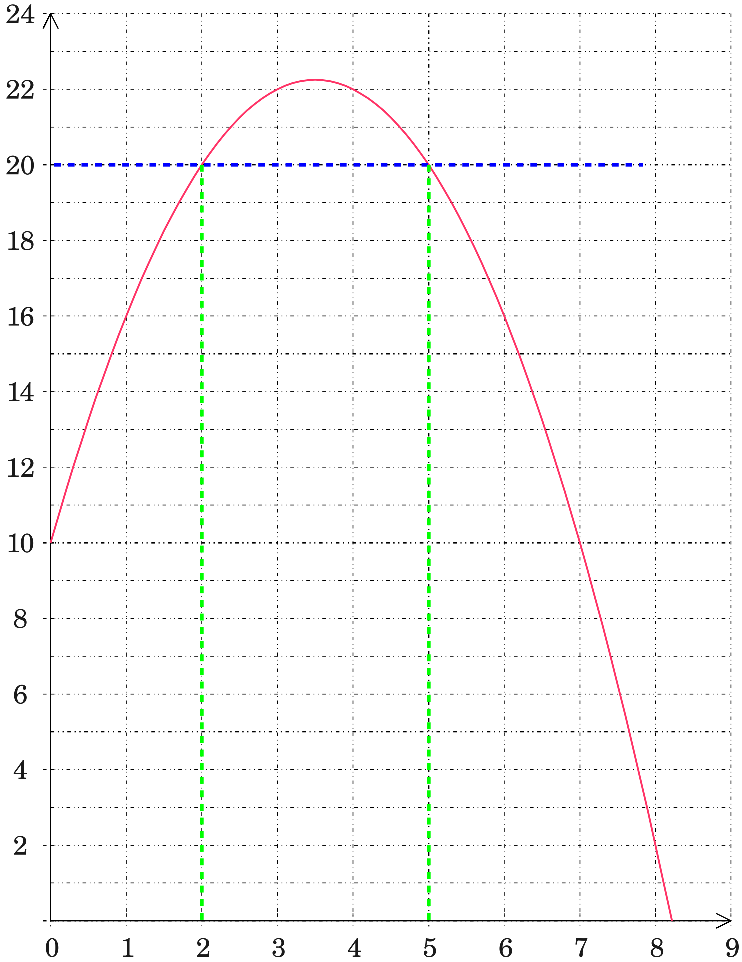
Exercice 3 :

On observe l'évolution d'une population de bactéries au cours d'une semaine :
x représente le temps écoulé depuis le début de l'observation, en jours,
et $f(x)$ représente le nombre de bactéries en milliers.
On a établi que $f(x) = -x^2 + 7x + 10$, où x appartient $[0 ; 8]$.

1. Le tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	10	16	20	22	22	20	16	10	2

2. Représenter la fonction f :



3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 20$:
   On voit graphiquement que $f(x) \geqslant 20$ lorsque $x \in [2 ; 5]$.

4.
   a. Démontrer que $f(x) = (-x + 2)(x - 5) + 20$.
   On a :
   $(-x+2)(x-5)+20=-x\times x-x\times(-5)+2\times x+2\times(-5)+20=-x^2+5x+2x-10+20=-x^2+7x+10$.
   On obtient la formule de l'énoncé, on peut donc conclure : $f(x) = (-x + 2)(x - 5) + 20$.

   b. En déduire l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \geqslant 20$:
   On remplace $f(x)$ par $(-x + 2)(x - 5) + 20$.
   On doit donc résoudre :
   $(-x + 2)(x - 5) + 20 \geqslant 20$; ce qui est équivalent à : $(-x + 2)(x - 5) \geqslant 0$.

On résout les équations :

$-x + 2 = 0$ $-x = -2$ $x = 2$	$x - 5 = 0$ $x = 5$

Le tableau de signes :

x	0		2		5		8
Signe de $(- x + 2)$		+	0	−		−	
Signe de $(x - 5)$		−		−	0	+	
Signe de $(-x + 2)(x - 5)$		−	0	+	0	−	

$(-x + 2)(x - 5)$ doit être positif (éventuellement nul), donc l'ensemble solution est :

$$S = [2 ; 5].$$

Ceci signifie que le nombre de bactéries est supérieur ou égal à 20 milliers entre 2 et 5 jours à partir du début de l'observation.

5. À l'aide du graphique, déterminer une valeur approchée du maximum de f :
   On voit facilement que le maximum de f vaut environ 22.

6. On veut vérifier la question précédente par le calcul.
   a. Démontrer que $f(x) = -(x - 3{,}5)^2 + 22{,}25$:
   On a : $-(x-3{,}5)^2+22{,}5=-(x^2-2\times x\times 3{,}5+3{,}5^2)+22{,}5$
   $-(x-3{,}5)^2+22{,}5=-(x^2-7x+12{,}25)+22{,}5$
   $-(x-3{,}5)^2+22{,}5=-x^2+7x-12{,}25+22{,}5$
   $-(x-3{,}5)^2+22{,}5=-x^2-7x+10$

   On a bien : $f(x) = -(x - 3{,}5)^2 + 22{,}25$.

   b. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 8]$, $f(x) \leqslant 22{,}25$ et que $f(3{,}5) = 22{,}25$:
   On sait qu'un carré est toujours positif.
   On a donc : pour tout $x \in [0 ; 8]$, $(x - 3{,}5)^2 \geqslant 0$, donc $-(x - 3{,}5)^2 \leqslant 0$.
   Donc : pour tout x, $-(x - 3{,}5)^2 + 22{,}25 \leqslant 22{,}25$.

   Autrement dit : pour tout x, $f(x) \leqslant 22{,}25$.

   D'autre part, on vérifie que $f(3{,}5) = 22{,}25$ (il n'y a qu'à remplacer x par 3,5 dans la formule.)

   Préciser alors la valeur du maximum de f :
   On voit que 22,25 est la plus grande des images par f d'un nombre réel x. C'est donc le maximum de f sur l'ensemble [0 ; 8].

   Cela signifie que le nombre maximum de bactéries observées a été de 22,25 milliers.

   Voilà.