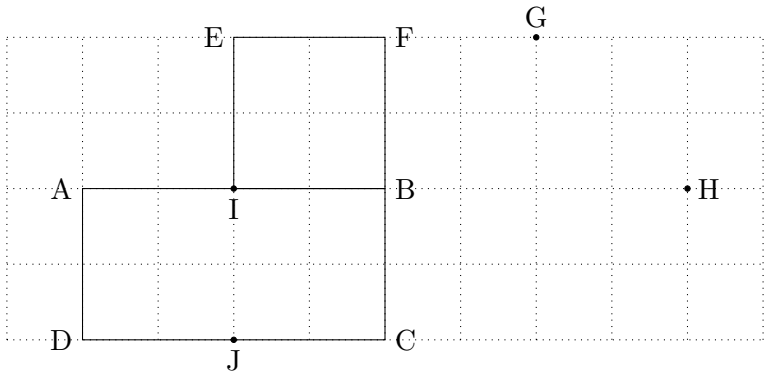
Corrigé du devoir surveillé n° 2

Exercice 1 :

Dans la figure ci-dessous ABCD est un rectangle. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [DC]. EFBI est un carré.

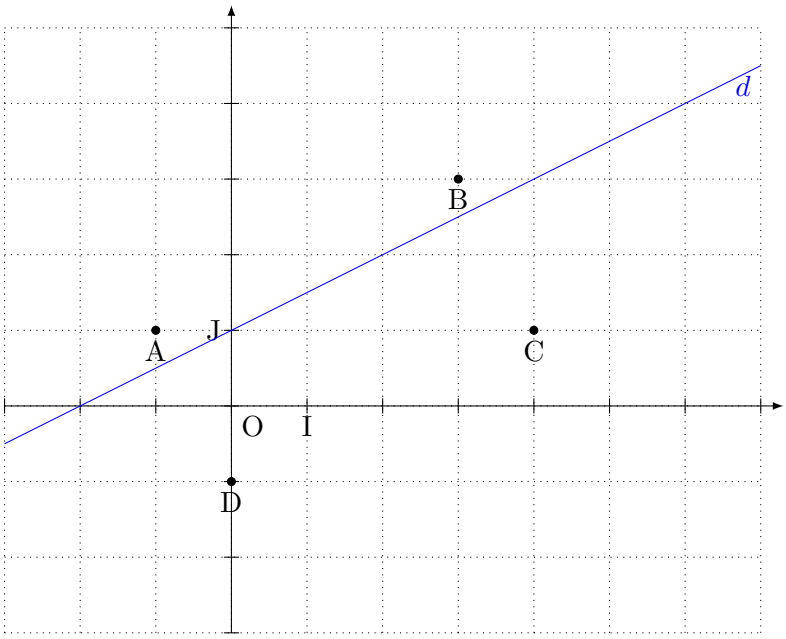


1. Repère (I ; B ; E).
   (a) Le repère (I ; B ; E) est orthonormé.
   (b) E(0 ; 1)
   A(–1 ; 0)
   D(–1 ; –1)
   C(1 ; –1)
   (c) Dessin.
2. Repère (D ; C ; A).
   (a) A(0 ; 1)
   J(0,5 ; 0)
   F(1 ; 2)
   E(0,5 ; 2)
   (b) Dessin.

Exercice 2 (13 points) :

Le plan est reporté au repère orthonormé (O ; I ; J). On donne les points suivants :

A(−1 ; 1) ; B(3 ; 3) ; C(4 ; 1) ; D(0 ; −1).



1. Sur le dessin...
2. Coordonnées de K, milieu de [AC]. On applique la formule :
   $x_{\mathrm{K}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{C}}}{2} = \dfrac{-1+4}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$
   $y_{\mathrm{K}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{C}}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
   Ainsi : K(1,5 ; 1)
3. Calculons les coordonnées du milieu K' de [BD].
   $x_{\mathrm{K'}} = \dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{3+0}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$
   $y_{\mathrm{K'}} = \dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{D}}}{2} = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
   Ainsi : K'(1,5 ; 1).
   Les points K et K' sont identiques. Donc K est bien le milieu de [BD].

   Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent donc en leur milieu.
   Cela implique, d'après la propriété de collège, que ABCD est un parallélogramme.
4. On applique la formule :
   $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})^2 + (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{B}})^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$
   $\mathrm{BC} = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{C}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{C}})^2} = \sqrt{(3-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
   $\mathrm{AC} = \sqrt{(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{C}})^2 + (y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{C}})^2} = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

   Remarque : Comme A et C ont la même ordonnée, on voit directement que $\mathrm{AC} = x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}} = 5$.
5. $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \sqrt{20}^2 + \sqrt{5}^2 = 20 + 5 = 25$
   $\mathrm{AC}^2 = 5^2 = 25$
   On voit donc que $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$.
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle ABC est rectangle en B.

   Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme qui a un angle droit. C'est donc un rectangle.
6. Sur le dessin.
7. On cherche si les coordonnées de E vérifient l'équation de d : est-ce que $y_{\mathrm{E}} = 0{,}5x_{\mathrm{E}} + 1$?
   On a : $0{,}5x_{\mathrm{E}} + 1 = 0{,}5 \times 3 + 1 = 1{,}5 + 1 = 2{,}5 = y_{\mathrm{E}}$.
   On a bien : $y_{\mathrm{E}} = 0{,}5x_{\mathrm{E}} + 1$.
   Comme les coordonnées de E vérifient l'équation de la droite d, alors E appartient bien à d.

8. Déterminer l'équation de la droite (DC).

   On applique la méthode :

   D'abord, on vérifie que la droite (DC) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (pas "verticale".)

   On calcule les coefficients :

   $m = \dfrac{y_{\mathrm{D}} - y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{C}}} = \dfrac{-1-1}{0-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

   $p = y_{\mathrm{D}} - mx_{\mathrm{D}} = -1 - 0{,}5 \times 0 = -1.$

   On obtient l'équation de (DC) : $y = 0{,}5x - 1$.

   On vérifie que les coordonnées de D et C vérifient bien cette équation :

   Pour D : $-1 = 0{,}5 \times 0 - 1 \rightarrow$ ça marche.

   Pour C : $1 = 0{,}5 \times 4 - 1 \rightarrow$ ça marche.

   On peut remarquer que (DC) est parallèle à d : elles ont le même coefficient directeur.