# Correction du devoir surveillé nº3

### Question de cours :

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

Dans un repère orthonormal, la distance AB vaut :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ ou $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

### Exercice 1 :

1. $y = x$ est l'équation de $d_3$.
   $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{14}{3}$ est l'équation de $d_1$.
   $y = 0{,}5x + 1$ est l'équation de $d_4$.
   $x = 2$ est l'équation de $d_5$.
   $y = 1$ est l'équation de $d_2$.
2. Si un point est sur le cercle de centre I (1 ; 3) et de rayon 5, alors ses coordonnées vérifient l'équation $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 5$.
3. Si $d_1$ : $y = 2x - 3$ et $d_2$ : $y = 2x + 3$ alors les droites $d_1$ et $d_2$ n'ont pas d'intersection.
4. On se place dans u repère orthonormé ; on souhaite écrire un algorithme qui calcule la longueur AB à partir des coordonnées : A($x_A$ ; $y_A$) et B($x_B$ ; $y_B$).
   L'algorithme correct est :

   ```
   Variables : x_A ; y_A ; x_B ; y_B ; t ; u : réels
       Début
           entrer x_A ; y_A ; x_B ; y_B ;
           t prend la valeur (x_B^2 − x_A^2) + (y_B^2 − y_A^2) ;
           u prend la valeur √t ;
           afficher u ;
       Fin.
   ```

5. Le symétrique de A($x_A$ ; $y_A$) par rapport à l'axe des abscisses (O$x$) a pour coordonnées : ($x_A$ ; $-y_A$).

### Exercice 2 :

1. On applique la formule : $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+5}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \end{cases}$. Donc I(1 ; 1,5).
2. $\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{5-2}{2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \end{cases}$.
   Les coordonnées du milieu de [BD] sont celles de I. Donc I est bien le milieu de [BD].
   Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent donc en leur milieu.
   D'après la propriété classique de collège, ceci implique que ABCD est un parallélogramme.

3. On applique la formule :
   $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(5-1)^2}=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ .
   De même :
   $BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(5-(-1))^2+(2-5)^2}=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ .

   Et :
   $AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(5-(-3))^2+(2-1)^2}=\sqrt{8^2+1^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$ .
   **Rappel : le carré d'un nombre est *toujours positif*.**

4. On a : $BC^2 = 45$ ; $AB^2 = 20$ ; donc $BC^2 + AB^2 = 65$.
   D'autre part, $AC^2 = 65$.
   Ainsi, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que la triangle ABC est rectangle en B.
   Le parallélogramme ABCD a un angle droit : donc, c'est un rectangle.

5. Calculons le coefficient directeur de (DC) :
   $m=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{-2-2}{3-5}=\frac{-4}{-2}=2$ .
   Donc l'équation de (DC) est : $y=2x+p$ . On cherche à présent la valeur de $p$.

   Comme le point D appartient à (DC), ses coordonnées vérifient l'équation de (DC) :
   $y_D=2x_D+p$ , donc en remplaçant : $-2=2\times3+p$ d'où : $-2-6=p$ , d'où $p=-8$ .
   L'équation de (BD) est $y=2x-8$ .
   Vérifions en remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées de C : $2\times5-8=10-8=2$ . Ça marche.

6. Il suffit de vérifier que les coordonnées de E vérifient l'équation de (DC) :
   $2\times4-8=0$ donc on a effectivement $y_E=2x_E-8$ . Le point E appartient bien à (DC).

7. La droite ($d$) est parallèle à (DC), donc elle a le même coefficient directeur : 2.
   Ainsi : ($d$) a pour équation : $y=2x+p$ . On cherche $p$.
   Comme I appartient à ($d$), on a : $y_I=2\times x_I+p$ ; on remplace : $1{,}5=2\times1+p$ d'où $p=1{,}5-2=-0{,}5$ .
   L'équation de ($d$) est donc : $y=2x-0{,}5$ .

8. On remplace $x$ et $y$ par les coordonnées de K dans l'équation de ($d$) et on regarde si l'égalité est vraie.
   $2\times31{,}25-0{,}5=62{,}5-0{,}5=62$ . On a bien $y_K=2x_K-0{,}5$ .
   Donc, le point K appartient bien à la droite ($d$).

9. Il y a plusieurs façons de faire.
   La plus basique est de calculer la longueur des côtés de AEB. On a déjà calculé AB à la question 3.
   $EB=\sqrt{(x_B-x_E)^2+(y_B-y_E)^2}=\sqrt{(-1-4)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(-5)^2+5^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ .

   $EA=\sqrt{(x_A-x_E)^2+(y_A-y_E)^2}=\sqrt{(-3-4)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(-7)^2+1^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ .
   On voit que EA=EB. Donc le triangle AEB est isocèle (de sommet principal E.)

Voilà.