

Mathématiques - Devoir surveillé n° 4

Seconde 8 - 12.12.2024

Exercice 1 (5 points) :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les points suivants : $A(3; -2)$; $B(-3; 4)$; $C(-4; 0)$; $E(1; 5)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu M de $[AC]$.
2. Déterminer par le calcul les coordonnées du point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
3. Calculer la longueur du segment $[AE]$ et la longueur du segment $[BE]$.
4. Préciser la nature du triangle ABE .

Exercice 2 (5 points) :

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites :
 (d_1) d'équation cartésienne : $x - y - 2 = 0$
et (d_2) d'équation cartésienne : $x + 3y - 18 = 0$.
2. En déduire par lecture graphique la solution du système : $\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + 3y - 18 = 0 \end{cases}$.
3. Vérifier la solution par le calcul (en remplaçant dans les deux équations).
4. Est-ce que le point $M(-9; 9)$ appartient à (d_1) ? Est-ce qu'il appartient à (d_2) ?



Exercice 3 (3 points) :

Résoudre le système suivant par substitution, puis vérifier la solution obtenue :

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

Exercice 4 (3 points) :

Sana achète 2 pulls et 4 pantalons, elle paie 150 €.

Elea achète 5 pulls et 2 pantalons, elle paie 199 €.

1. On pose x : le prix d'un pull et y : le prix d'un pantalon.

Écrire un système qui représente les indications de l'énoncé.

2. Résoudre ce système par combinaison.

Quel est le prix d'un pull? Quel est le prix d'un pantalon? (faire une phrase)

Exercice 5 (4 points) :

Parmi les systèmes suivants, déterminer ceux qui ont une solution unique (autrement dit, les deux équations représentent des droites sécantes) :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{cases} 2,1x - 4,9y = 0 \\ 3x - 7y - 3 = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 8x + 5,4y - 3,6 = 0 \\ 12x + 8,1y - 4,8 = 0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x + 3,2y + 1 = 0 \\ 7x + 11,4y + 1 = 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{2}{7}x + \frac{12}{35}y + \frac{4}{7} = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 1:

1.) D'après le cours:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 - 4}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_H = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1 \end{cases}$$

Les coordonnées de H sont donc : $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

2.) ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu. Ainsi, le point H, milieu de [AC], est aussi le milieu de [BD].

Par conséquent, on peut écrire:

$$\begin{cases} x_H = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_H = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \quad \text{On trouve en remplaçant: } \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{-3 + x_D}{2} \\ -1 = \frac{4 + y_D}{2} \end{cases}$$

Donc : $-1 = -3 + x_D$
 $2 = x_D$

et : $-2 = 4 + y_D$
 $-6 = y_D$

Ainsi, le point D a pour coordonnées : $(2; -6)$

3.) D'après le cours: $AE = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2}$
 $AE = \sqrt{(1 - 3)^2 + (5 - (-2))^2}$
 $AE = \sqrt{4 + 49}$
 $AE = \sqrt{53}$

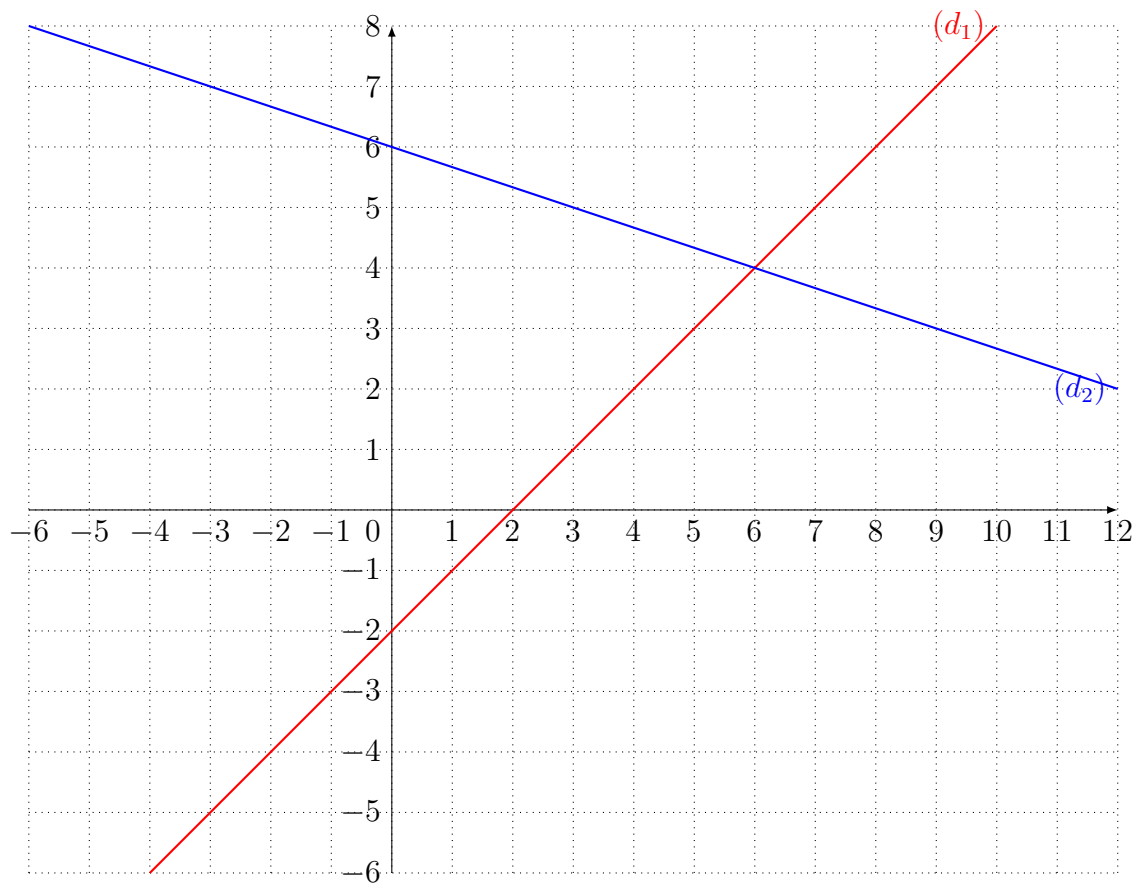
et : $BE = \sqrt{(x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2}$
 $BE = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (5 - 4)^2}$
 $BE = \sqrt{16 + 1}$
 $BE = \sqrt{17}$

4.) Le triangle ABE est quelconque.

Exercice 2:

1.) Tableau pour (d_1) : $\begin{array}{c|c|c|c} x & 2 & 0 & 4 \\ y & 0 & -2 & 2 \end{array}$

Pour (d_2) : $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 6 & 9 \\ y & 6 & 4 & 3 \end{array}$



2.) Graphiquement, le point d'intersection de (d_1) et (d_2) a pour coordonnées : $(6; 4)$

3) * (d_1) : $6 - 4 - 2 = 0$ Ça marche.

* (d_2) : $6 + 3 \times 4 - 18 = 0$ Ça marche.

4) Le point M appartient à (d_1) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de (d_1) .

On remplace : $-9 - 9 - 2 = -20 \neq 0$

Donc M n'appartient pas à (d_1) .

Même raisonnement pour (d_2) :

$$-9 + 3 \times 9 - 18 = 0$$

Donc M appartient à la droite (d_2) .

Exercice 3:

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

De la ligne 1, on tire : $y = -2x - 1$ (*)

On remplace dans la ligne 2:

$$4x + 3(-2x - 1) = 3$$

$$4x - 6x - 3 = 3$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

On remplace x par sa valeur dans l'équation (*):

$$y = -2 \times (-3) - 1 = 5$$

La solution du système est donc : $(-3; 5)$.

Vérification: $\begin{cases} 2 \times (-3) + 5 = -6 + 5 = -1 & \text{Ça marche.} \\ 4 \times (-3) + 3 \times 5 = -12 + 15 = 3 & \text{Ça marche.} \end{cases}$

Exercice 4:

- 1) 2 pulls et 4 pantalons coûtent : $2x + 4y$.
5 pulls et 2 pantalons coûtent : $5x + 2y$.

On obtient donc le système :
$$\begin{cases} 2x + 4y = 150 \\ 5x + 2y = 199 \end{cases}$$

- 2) Pour éliminer y , il suffit de multiplier la ligne 2 par (-2) .

$$\begin{cases} 2x + 4y = 150 \\ -10x - 4y = -398 \end{cases} \quad \text{On ajoute membre à membre ;}$$

$$2x - 10x + 4y - 4y = 150 - 398$$

$$-8x = -248$$

$$x = \frac{-248}{-8}$$

$$x = 31$$

Pour éliminer x , on peut multiplier la ligne 1 par (-5) et la ligne 2 par 2 :

$$\begin{cases} -10x - 20y = -750 \\ 10x + 4y = 398 \end{cases}$$

$$-10x + 10x - 20y + 4y = -750 + 398$$

$$-16y = -352$$

$$y = \frac{-352}{-16}$$

$$y = 22$$

Conclusion : un pull coûte 31€ et un pantalon 22€ .

Exercice 5:

Soient deux droites d'équations cartésiennes $ax + by + c = 0$
et $a'x + b'y + c' = 0$

D'après le cours, les droites sont sécantes si et seulement si
le tableau : $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline a' & b' \end{array}$ n'est pas un tableau de proportionnalité,
ou (c'est équivalent) si $ab' - a'b \neq 0$.

a) $\frac{2,1}{3} \mid \frac{-4,9}{-7}$ est un tableau de proportionnalité car :

$$\begin{aligned} 2,1 \times (-7) &= -14,7 \\ 3 \times (-4,9) &= -14,7 \end{aligned}$$

(les 2 produits en croix sont égaux).

Donc, les 2 droites ne sont pas sécantes ; le système n'admet pas une solution unique.

b) $\frac{8}{12} \mid \frac{5,4}{8,1}$ est un tableau de proportionnalité car :

$$\begin{aligned} 8 \times 8,1 &= 64,8 \\ 12 \times 5,4 &= 64,8 \end{aligned}$$

Donc, le système n'admet pas une solution unique.

c) $\frac{2}{7} \mid \frac{3,2}{11,4}$ n'est pas un tableau de proportionnalité car :

$$\begin{aligned} 2 \times 11,4 &= 22,8 \\ 7 \times 3,2 &= 22,4 \end{aligned}$$

Donc le système admet une solution unique (les droites sont sécantes).

d) $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{7}} \mid \frac{\frac{3}{2}}{\frac{12}{35}}$ est un tableau de proportionnalité car :

$$\frac{5}{4} \times \frac{12}{35} = \frac{5 \times 4 \times 3}{4 \times 5 \times 7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{2}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{2 \times 3}{7 \times 2} = \frac{3}{7}$$

Donc le système n'admet pas une solution unique.