Corrigé du devoir surveillé n° 5

Exercice 1 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, on considère les points suivants : $A(-2\,;3)$; $B(3\,;-2)$; $D(5\,;4)$.

1. Déterminer les coordonnées du milieu M de $[BD]$.

   $$\begin{cases} x_M = \dfrac{3+5}{2} \\ y_M = \dfrac{-2+4}{2} \end{cases}$$
   $M(4\,;1)$

2. En déduire les coordonnées du point C tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

   $ABCD$ est un parallélogramme si $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
   Soient $(x\,;y$ les coordonnées de C. Comme M est le milieu de $[AC]$, on peut écrire :

   $$\begin{cases} 4 = \dfrac{-2+x}{2} \\ 1 = \dfrac{3+y}{2} \end{cases}$$

   Donc : $\begin{cases} 8 = -2+x \\ 2 = 3+y \end{cases}$

   Donc : $\begin{cases} 10 = x \\ -1 = y \end{cases}$

   Donc C a pour coordonnées $(10\,;-1)$.

3. Calculer la longueur AB et la longueur AD.

   $AB = \sqrt{(3-(-2))^2+(-2-3)^2} = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$

   $AD = \sqrt{(5-(-2))^2+(4-3)^2} = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50}$

4. Préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.
   $ABCD$ est un parallélogramme (d'après la question 2) ; de plus, il a deux côtés consécutifs de même longueur ; donc, c'est un losange.

Exercice 2 :

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites :
   (d_1) d'équation cartésienne : $x-2y+3=0$
   et (d_2) d'équation cartésienne : $3x+y-5=0$.
   Un petit tableau de valeur pour chacune des droites :

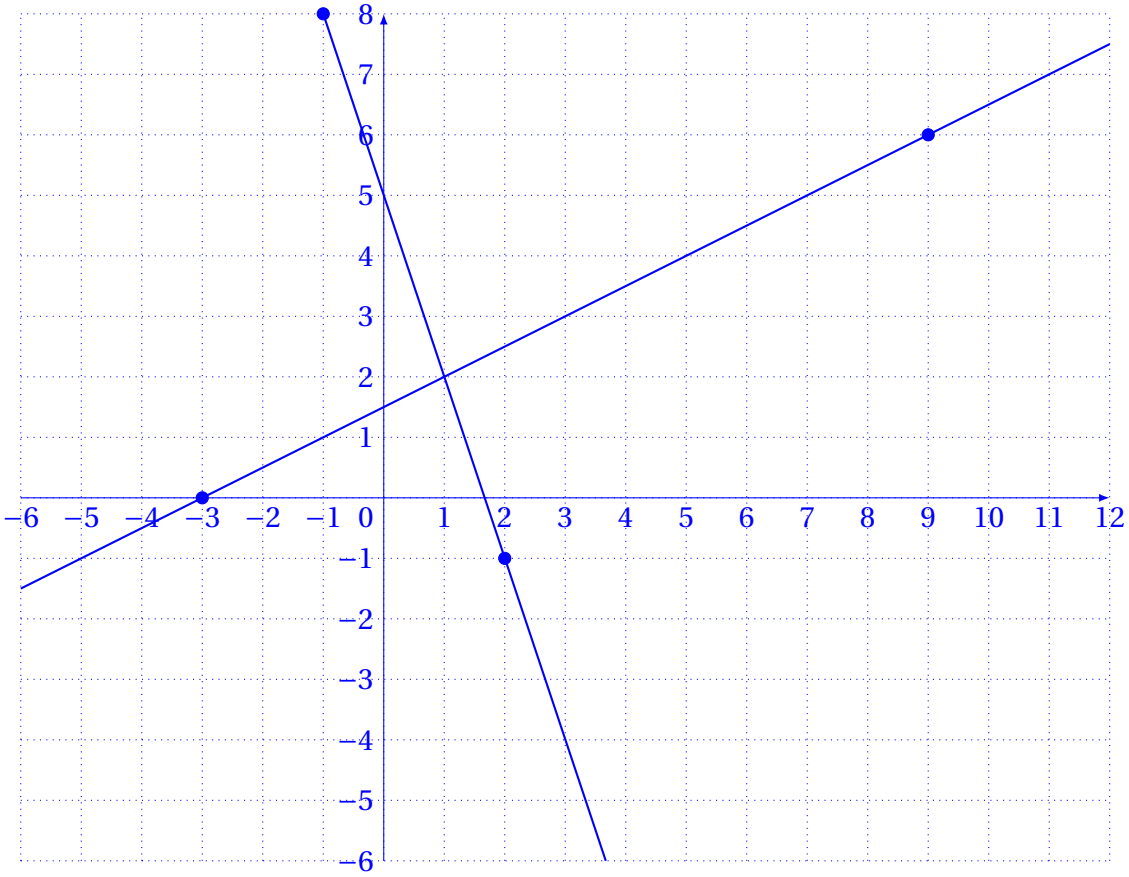
Pour (d_1) :

x	-3	9
y	0	6

Pour (d_2) :

x	2	-1
y	-1	8

On place donc les points de coordonnées $(-3\,;0)$ et $(9\,;6)$ et on trace la droite (d_1).
On place les points de coordonnées $(2\,;-1)$ et $(-1\,;8)$ et on trace la droite (d_2).



2. En déduire par lecture graphique la solution du système : $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x+y-5=0 \end{cases}$.

   Le système est formé de deux équations : celle de la droite (d_1) et celle de la droite (d_2). Ainsi, les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2) vérifient les deux équations : elles forment donc la solution du système.

   On lit graphiquement les coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2) : $(1\,;2)$. La solution du système est donc $(1\,;2)$.

3. Vérifier la solution par le calcul (en remplaçant dans les deux équations).

   Pour la première équation : $1-2\times 2+3=0$: Ça marche.

   Pour la première équation : $3\times 1+2-5=0$: Ça marche.

4. Est-ce que le point $M(21\,;12)$ appartient à (d_1) ? Est-ce qu'il appartient à (d_2) ?
   On cherche si $(21\,;12)$ est solution de l'équation de (d_1) : $21-2\times 12+3=0$. C'est vrai, donc M appartient à (d_1).

   On cherche si $(21\,;12)$ est solution de l'équation de (d_2) : $3\times 21+12-5=70$. C'est faux, donc M n'appartient pas à (d_2).

Exercice 3 :

Résoudre le système suivant par substitution, puis vérifier la solution obtenue :

$$\begin{cases} 3x + y = -1 \\ 7x + 3y = 3 \end{cases}$$

Isolons y dans la première équation :

$y = -3x - 1$ (*)

Remplaçons dans la deuxième équation :

$7x + 3(-3x - 1) = 3$

On résout : $7x - 9x - 3 = 3$

$-2x = 6$

$x = -3$

On remplace dans l'expression (*) :

$y = -3 \times (-3) - 1$

$y = 8$

Donc, la solution est $(-3\,;8)$.

Exercice 4 :

Chez un marchand de meubles pour collectivités, les prix sont les suivants :

• 2 lits et 1 armoire coûtent 690 €;

• 4 lits et 3 armoires coûtent 1650 €.

1. On pose x : le prix d'un lit et y : le prix d'une armoire.
   Écrire un système qui représente les indications de l'énoncé.

   $$\begin{cases} 2x + y = 690 \\ 4x + 3y = 1650 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système par combinaison.
   Donner alors le prix d'un lit et le prix d'une armoire (faire une phrase).

   $$\begin{cases} 2x + y = 690 \\ 4x + 3y = 1650 \end{cases}$$

   On multiplie la ligne 1 par -2 :

   $$\begin{cases} -4x - 2y = -1380 \\ 4x + 3y = 1650 \end{cases}$$

   On ajoute membre à membre ligne 2 + ligne 1 :

$-4x-2y+4x+3y=-1380+1650$
On résout :
$y=270$
À partir du système de départ, on multiplie la ligne 1 par (3) :

$$\begin{cases} -6x-3y=-2070 \\ 4x+3y=1650 \end{cases}$$

On ajoute membre à membre ligne 2 + ligne 1 :
$-6x-3y+4x+3y=-2070+1650$
On résout :
$-2x=-420$
$x=\dfrac{-420}{-2}$
$x=210$

La solution du système est donc : $(210\,;270)$

Donc : un lit coûte 210 € et une armoire coûte 270 €.

Exercice 5 :

Pour chacun des systèmes suivants, déterminer s'il a une, aucune, ou une infinité de solutions :

a) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -9x-6y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9{,}6x+8{,}4y=3{,}6 \\ 5{,}6x+4{,}9y=2{,}1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x+7y=1 \\ 7x+3y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{4}{7}x+\dfrac{2}{5}y=18 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{15}y=21 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ -9x-6y=3 \end{cases}$

On forme un tableau du type : | a | b | / | a' | b' | et on regarde si c'est un tableau de proportionnalité.

3	2
-9	-6

$3\times(-6)=-18\,;\ -9\times 2=-18$

C'est un tableau de proportionnalité, donc les droites ont même direction.

Le point de coordonnées $(0\,;0)$ (l'origine) appartient à la droite d'équation $3x+2y=0$ mais pas à la droite d'équation $-9x-6y=3$. Donc les deux droites sont parallèles distinctes.

b) $\begin{cases} 9{,}6x+8{,}4y=3{,}6 \\ 5{,}6x+4{,}9y=2{,}1 \end{cases}$

Même méthode :

9,6	8,4
5,6	4,9

$9{,}6 \times 4{,}9 = 47{,}04$; $5{,}6 \times 8{,}4 = 47{,}04$

C'est un tableau de proportionnalité, donc les droites ont même direction.

Le point de coordonnées $(0{,}375\,;0)$ appartient à la droite d'équation $9{,}6x+8{,}4y = 3{,}6$ et à la droite d'équation $5{,}6x + 4{,}9y = 2{,}1$. Donc les deux droites sont parallèles confondues.

On peut remarquer qu'on passe des coefficients de la ligne 1 aux coefficients de la ligne 2 en multipliant par $\frac{7}{12}$. Donc les deux équations sont équivalentes (elles déterminent la même droite).

c) $\begin{cases} 3x + 7y = 1 \\ 7x + 3y = 1 \end{cases}$

Même méthode :

3	7
7	3

$3 \times 3 = 9$; $7 \times 7 = 49$

Ce n'est pas un tableau de proportionnalité, donc les droites sont sécantes.

d) $\begin{cases} \frac{4}{7}x + \frac{2}{5}y = 18 \\ \frac{2}{3}x + \frac{7}{15}y = 21 \end{cases}$

Même méthode :

$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{15}$

$\frac{4}{7} \times \frac{7}{15} = \frac{4}{15}$; $\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

C'est un tableau de proportionnalité, donc les droites ont même direction.

Le point de coordonnées $(0\,;45)$ appartient à la droite d'équation $\frac{4}{7}x + \frac{2}{5}y = 18$ et à la droite d'équation $\frac{2}{3}x + \frac{7}{15}y = 21$. Donc les deux droites sont parallèles confondues.