Devoir surveillé nº5 - Corrigé

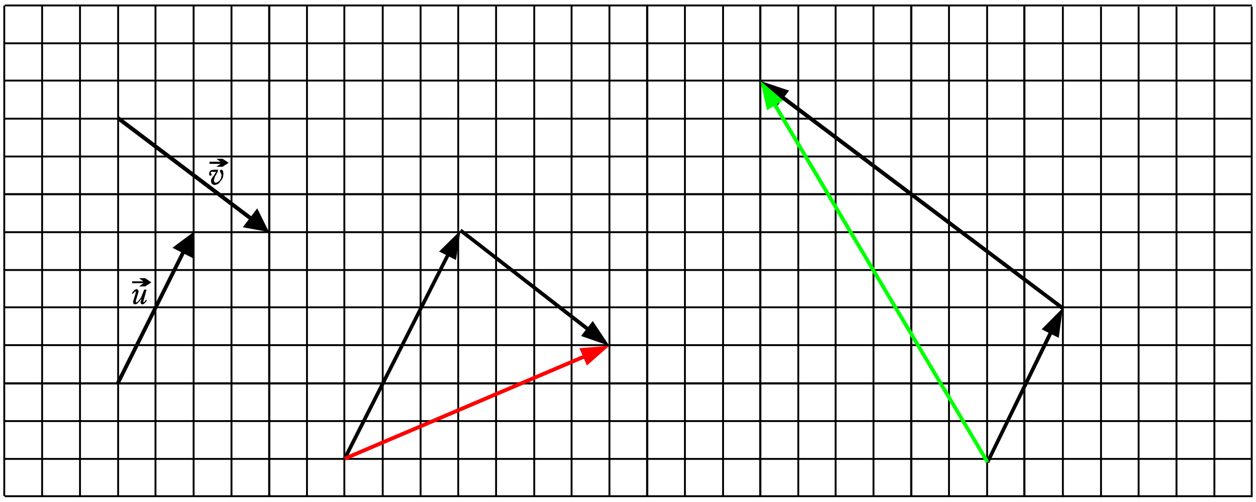
Questions de cours :

1. Le vecteur nul est le vecteur de coordonnées (0 ; 0).
2. Si on note $(a\ ;\ b)$ les coordonnées de $\vec{u}$, le vecteur $k\,\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(ka\ ;\ kb)$.
3. Deux vecteur non nuls sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un nombre réel.
Autrement dit, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Exercice 1 :

1. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}$.
On a utilisé la relation de Chasles : $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DA}$ et le fait que $\overrightarrow{DB}$ est l'opposé de $\overrightarrow{BD}$.
2. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.
On a utilisé trois fois la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

Exercice 2 :



Le vecteur $\vec{w}$ est dessiné en rouge et le vecteur $\vec{t}$ est en vert.

Exercice 3 :

1) On dispose les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un tableau :

5	–15,2
–4	12,1

5×12,1 ≠ –4×(–15,2) ; donc le tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Par conséquent les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Même méthode :

3,5	–21
–4	24

3,5×24=84=(–4)×(–21) ; donc le tableau est un tableau de proportionnalité.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. On calcule : $\frac{-21}{3,5}=\frac{24}{-4}=-6$.

Donc on passe des coordonnées de $\vec{u}$ aux coordonnées de $\vec{v}$ en multipliant par –6.
Autrement dit : $\vec{v}=-6\vec{u}$: k = –6.

3) Les coordonnées doivent être proportionnelles puisque les deux vecteurs sont colinéaires. Donc le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

m+3	3m
4	7

On a donc : $(m+3)\times 7=4\times 3m$, soit : $7m+21 = 12m$, équivalent à : $21= 5m$ d'où $m = 4{,}2$.
On a alors : $m + 3 = 7{,}2$ et $3m = 12{,}6$.
Les coordonnées des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc : $\vec{u}$ (7,2 ; 4) et $\vec{v}$ (12,6 ; 7).
Or, $12{,}6 = 7{,}2\times 1{,}75$ et $7 = 4\times 1{,}75$, donc $\vec{v}=1{,}75\vec{u}$. Les deux vecteurs sont donc bien colinéaires.

Exercice 4 :

1. $\overrightarrow{AB}$ (–4 – (–1) ; –2 – 4) donc $\overrightarrow{AB}$ (–3 ; –6)
   $\overrightarrow{BC}$ (1 – (–4) ; 0 – (–2)) donc $\overrightarrow{BC}$ (5 ; 2)
2. Il y a plusieurs façons de faire. Par exemple :
   ABCD est un parallélogramme, c'est équivalent à dire que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Donc les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ sont égales à celles de $\overrightarrow{BC}$. Ainsi : $\overrightarrow{AD}$ (5 ; 2).
   On trouve les coordonnées de D en ajoutant aux coordonnées de A celles du vecteur $\overrightarrow{AD}$ (cours).
   Donc : $\begin{cases} x_d=-1+5=4 \\ y_d=4+2=6 \end{cases}$. Ainsi D a pour coordonnées (4 ; 6).
3. La formule est bien connue : $\mathrm{M}\left(\frac{x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{C}}}{2};\frac{y_{\mathrm{A}}+y_{\mathrm{C}}}{2}\right)$. On trouve M(0 ; 2).
4. On connaît les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$. Calculons celles de $\overrightarrow{BE}$: $\overrightarrow{BE}$ (6 – (–4) ; 2 –(–2)) donc $\overrightarrow{BE}$ (10 ; 4). Cherchons si $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires.

5	10
2	4

   On voit qu'on passe de la première colonne à la deuxième en multipliant par 2. Donc $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BC}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires, donc les points B, C, E sont alignés.
5. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}$ par la méthode habituelle.
   On trouve $\overrightarrow{AC}$ (2 ; –4) et $\overrightarrow{BF}$ (–3 ; 6).
   On observe que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{BF}=-1{,}5\overrightarrow{AC}$. Donc (AC) et (BF) ont la même direction. Par conséquent, elles sont bien parallèles.