Mathématiques - Correction du baccalauréat blanc

Lycée Bristol - Avril 2016

EXERCICE 1

Partie A

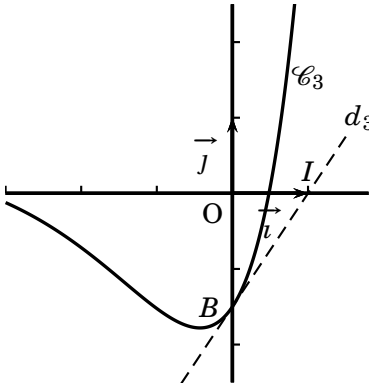
1. Par lecture graphique, le signe de $f(x)$ est donné par :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

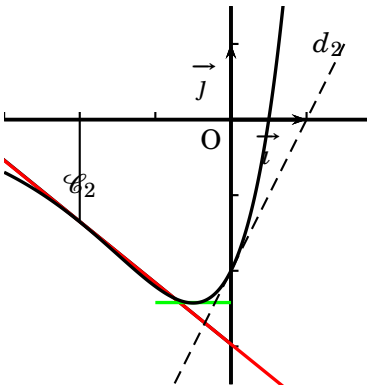
2. a. On sait que F est une primitive de f donc, $F' = f$
$F'(0) = f(0) = 2$, $F'(-2) = f(-2) = 0$.

b.

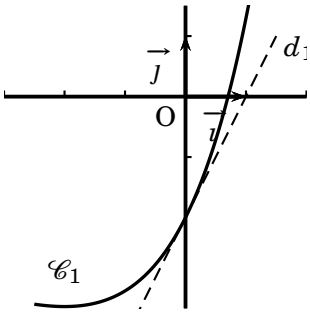
$\mathscr{C}_3$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse 0 n'a pas pour coefficient directeur 2 : Elle passe par $B(0\ ;\ -1{,}5)$ (environ) et $I(1\ ;\ 0)$ donc le coefficient directeur de cette tangente est $\frac{y_I - y_B}{x_I - x_B} = 1{,}5$, donc $\mathscr{C}_3$ ne convient pas.



$\mathscr{C}_2$ ne convient pas car la tangente au point d'abscisse (-2) n'a pas pour coefficient directeur 0.
$\mathscr{C}_2$ ne convient pas, la tangente horizontale semble plutôt concerner le point d'abscisse $(-0{,}5)$ de la courbe.



Il reste donc $\mathscr{C}_1$



Partie B :

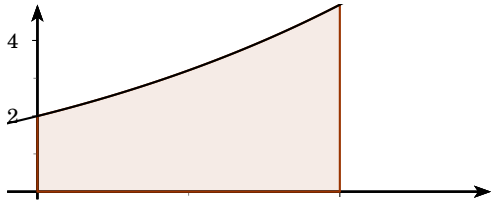
1. a. $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \times \frac{1}{2}$ donc
$f'(x) = \frac{1}{2}(2 + x + 2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

b. On sait que la fonction exp ne prend que des valeurs strictement positives, donc $f'(x)$ est du signe de $(x+4)$, et donc le sens des variations de f est donné par le tableau :

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$(-2)\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	

Il y a donc bien un minimum en $x=-4$

2. a. si $x>(-2)$, $f(x)>0$ vu son expression, donc sur $[0\ ;\ 1]$ f est positive, continue (car produit de fonctions continues), son intégrale sur $[0\ ;\ 1]$ est donc l'aire en unité d'aire de la surface entre la courbe de f, l'axe des x et les verticales d'équations $x=0$ et $x=1$ (en unité d'aire).



b. $2(u(x)v'(x)+u(x)v'(x))=2\left(1\times \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+x\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right)=(2+x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

Ainsi on voit bien que f est une dérivée : $f=(2uv)'$; donc $(2uv)$ est une primitive de f.

c. L'intégrale I se calcule à l'aide d'une primitive de f donc $I=[2u(x)v(x)]_0^1=[2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}]_0^1=2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\mathrm{e}}$

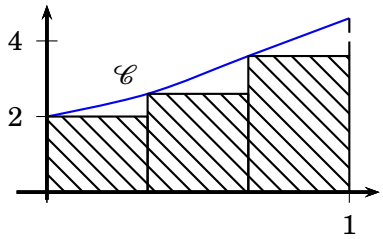
3. a. Faisons un tableau des valeurs successives de k et s pendant le déroulement de l'algorithme pour $n=3$:

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels.
	s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$
	| Affecter à s la valeur $s+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
	Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

k	s
0	0
0	$0+\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)$
1	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)$
2	$\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$

Le traitement est alors fini car k a atteint la valeur $(3-1)$ ce qui a été suivi de la nouvelle valeur de s, l'affichage est alors $\frac{1}{3}f\left(\frac{0}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)$,

or chacun de ces trois termes est l'aire d'un des trois rectangles (largeur obtenue en divisant l'unité par $n=3$, leurs longueurs successives sont $f\left(\frac{0}{3}\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right)$.



b. D'une façon générale l'affichage de l'algorithme obtenu après n boucles (de $k=0$ à $k=(n-1)$) est la somme de n termes qui sont de la forme $\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$ donc l'affichage est :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

c'est la somme des aires des rectangles « sous la courbe » et au dessus de l'axe des x entre $x=0$ et $x=1$, leur largeur vaut $\frac{1}{n}$.

Quand n devient grand, s_n se rapproche de $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. (cours)

Exercice 2 - Non spécialistes

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. $z_M = 2 \times \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

b. $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M = -\mathrm{i}(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = -\mathrm{i} + \mathrm{i}^2\sqrt{3} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

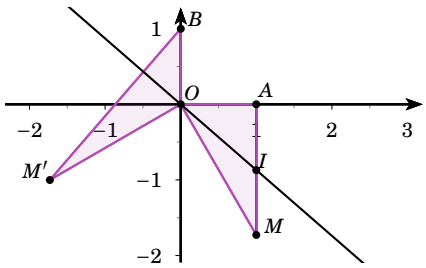
Module et argument méthode algébrique :

$|z_{M'}| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$ et si l'on nomme θ un argument de $z_{M'}$ alors, par propriété, $\begin{cases} \cos\theta &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

On reconnaît $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ (modulo 2π).

Module et argument par la forme exponentielle :
$|z_{M'}| = |-\mathrm{i}| \times |z_M| = 1 \times |2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}| = 2$
$\arg(z_{M'}) = \arg(-\mathrm{i}) + \arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6}$ (module 2π).

c. La figure n'est pas à l'échelle.
Graphiquement on vérifie les propriétés 1 et 2.



2. Cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.

a. $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2} = \dfrac{x+1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{y}{2}$.

b. $z_{M'} = -\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) = y - \mathrm{i}\,x$.

c. $I\left(\dfrac{x+1}{2}\ ;\ \dfrac{y}{2}\right)$, B(0 ; 1) et $M'(y\ ;\ -x)$.

d. $\overrightarrow{\mathrm{O}I} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}M'} = \left(\dfrac{x+1}{2}\right) \times y + \left(\dfrac{y}{2}\right) \times (-x-1) = \dfrac{xy}{2} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{xy}{2} - \dfrac{y}{2} = 0$ donc les droites (OI) et (BM') sont perpendiculaires.

e. $\mathrm{B}M' = \sqrt{y^2 + (-x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ et d'autre part , $2\mathrm{O}I = 2\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ donc

$$2\mathrm{O}I = \mathrm{B}M'.$$

Exercice 2 - Spécialistes

1. a. Les entiers 7 et 16 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $7u - 16v = 1$. Par ailleurs $7 \times 7 - 16 \times 3 = 1$, le couple (7 ; 3) répond alors à la question.

b. On a, en multipliant chaque membre de la dernière égalité par 5 : $7 \times 35 - 16 \times 15 = 5$. Le couple (35 ; 15) est donc une solution particulière de (E).

c. Soit $(x\ ;\ y)$ une solution de (E), alors $7x - 16y = 7 \times 35 - 16 \times 15$, d'où :

$$7(x-35) = 16(y-15). \qquad (1)$$

16 divise $7(x-35)$ et est premier avec 7, donc, d'après le théorème de Gauss, 16 divise $x-35$: il existe donc un entier relatif k tel que $x-35 = 16k$. En remplaçant $x-35$ par $16k$ dans (1), puis en simplifiant,

on en déduit que $y - 15 = 7k$. Ainsi, si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors nécessairement $(x\ ;\ y)$ est de la forme $(35 + 16k\ ;\ 15 + 7k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie aisément que de tels couples sont bien solutions de (E).

d. Un point de D à coordonnées entières appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z}\ ;\ y \in \mathbb{Z} \\ 7x - 16y = 5 \\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x\ ;\ y) \text{ solution de (E)} \\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50 \end{cases}$$

On cherche donc tous les entiers relatifs k tels que $0 \leqslant 35 + 16k \leqslant 50$ et $0 \leqslant 15 + 7k \leqslant 50$, ce qui équivaut à $-\dfrac{35}{16} \leqslant k \leqslant \dfrac{15}{16}$ et $-\dfrac{15}{7} \leqslant k \leqslant \dfrac{35}{7}$. Les seules valeurs possibles de k sont -2, -1 et 0.

Il y a donc trois points de $D \cap \mathscr{C}$ dont les coordonnées sont entières :

$$A(3\ ;\ 1) \quad B(19\ ;\ 8) \quad C(35\ ;\ 15).$$

2. a. On a $7 \equiv 2\ (5)$, $16 \equiv 1\ (5)$ et $5 \equiv 0\ (5)$

Par conséquent, si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), en « passant » aux congruences : $7x^2 - 16y^2 = 5$ devient $2x^2 - y^2 \equiv 0\ (5)$, c'est-à-dire $2x^2 \equiv y^2\ (5)$.

b. On calcule aisément :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, $2x^2$ est congru à	0	2	3	3	2

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3	4
Modulo 5, y^2 est congru à	0	1	4	4	1

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2x^2$ par 5 sont donc 0, 2 et 3. De même, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 1 et 4.

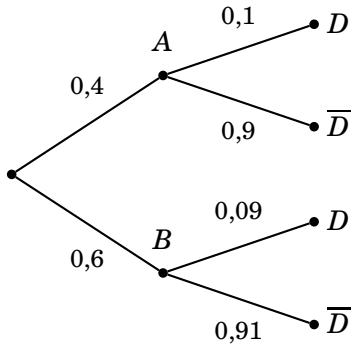
c. Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $2x^2 \equiv y^2\ (5)$ ce qui n'est possible, d'après les tableaux précédents, que si $x \equiv 0\ (5)$ et $y \equiv 0\ (5)$, c'est-à-dire si x et y sont des multiples de 5.

3. Supposons que x et y sont deux entiers multiples de 5. Alors il existe des entiers a et b tels que $x = 5a$ et $y = 5b$. En « réinjectant » cela dans l'équation (F) on a alors : $7 \times 25a^2 - 16 \times 25b^2 = 5$, c'est-à-dire $25(7a^2 - 16b^2) = 5$, ce qui est impossible (5 n'est pas multiple de 25 !). L'équation (F) ne possède donc aucune solution.

Remarque : Cet exercice est inspiré de l'exercice 4 du bac Antilles-Guyane de juin 2011.

EXERCICE 3

1. a.



b. On demande $P(A \cap D)$, selon l'arbre c'est $0{,}4 \times 0{,}1$, donc $P(A \cap D) = 0{,}04$.

c. On calcule aussi $P(B \cap D)$ de la même façon, c'est $0{,}6 \times 0{,}09 = 0{,}054$.

Enfin comme A et B forment une partition de l'ensemble des pièces, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B)$ car les événements $(D \cap A)$ et $(D \cap B)$ sont disjoints (= incompatibles) ainsi $P(D) = 0{,}04 + 0{,}054 = 0{,}094$.

d. On nous demande $P_D(A)$, on utilise la formule :
$P_D(A) = \dfrac{P(D \cap A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}094} = \dfrac{40}{94} = \dfrac{20}{47}$.

2. a. D'après l'énoncé, T ne prend que deux valeurs : 5 et 8.
La probabilité que la pièce soit fabriquée en 8 min est la probabilité que cette pièce ait un défaut.
Ainsi, $P(T = 8) = P(D) = 0{,}094$.
La probabilité que la pièce soit fabriquée en 5 min est la probabilité qu'elle n'ait pas de défaut.
Ainsi, $P(T = 5) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 0{,}906$.
On obtient :

t	5	8
$P(T = t)$	0,906	0,094

b. On a par définition : $E(T) = 5 \times P(T = 5) + 8 \times P(T = 8) = 5 \times 0{,}906 + 8 \times 0{,}064 = 5{,}282$.
Ainsi, le temps moyen de fabrication d'une pièce est de 5,282 min $\simeq$ 5 min 17 s.

EXERCICE 4

Commun à tous les candidats

1. On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}2\\6\\-3\end{pmatrix}$

On voit facilement que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
Donc les vecteurs sont coplanaires. La proposition est **vraie**.

2. Le système donné dans l'énoncé admet pour solution $(-1;0;2)$, c'est-à-dire les coordonnées de E. Donc ce système est une représentation paramétrique d'une droite passant par E.
D'autre part, les coefficients de t dans ce système sont $(1;-1;0)$. Donc, la droite représentée par ce système admet comme vecteur directeur $\vec{u}$.
Donc la proposition est **vraie**.

3. Les droites sont sécantes en F si et seulement si F appartient à la fois à d et à d', autrement dit si les coordonnées de F sont solutions des deux systèmes.

On remplace $(x;y;z)$ par les coordonnées de F dans le système représentant d : $\begin{cases} 1 = 3 + 2t \\ 0 = -1 - t \\ 5 = 3 - 2t \end{cases}$.

On trouve $t = -1$. Donc $F \in d$.

On remplace ensuite $(x;y;z)$ par les coordonnées de F dans le système représentant d' : $\begin{cases} 1 = 4 + 2t' \\ 0 = 1 + t' \\ 5 = 5 \end{cases}$.

On trouve $t' = -\dfrac{3}{2}$ dans la première ligne et $t' = -1$ dans la deuxième. Donc $F \notin d$.
La proposition est **fausse**.

4. La représentation paramétrique de Δ indique que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

La représentation paramétrique de P indique que les vecteurs $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs de P.

On voit facilement que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$. Donc les trois vecteurs sont coplanaires. Par conséquent, la droite Δ est parallèle (au sens large) à P. Il reste à savoir si elle est incluse dans P ou strictement parallèle à P.
Il suffit de choisir un point au hasard sur Δ et de regarder s'il appartient à P. Par exemple, donnons à t la valeur 0. Alors le point $M\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ appartient à Δ.

On reporte dans le système de représentation paramétrique de P : $\begin{cases} -1 = 5 + u - s \\ 0 = 2 - s \\ 1 = 4 + u + s \end{cases}$.

La deuxième ligne donne $s = 2$, la première ligne donne alors $u = -4$ et la troisième ligne : $u = -5$. C'est impossible, donc ce système n'admet pas de solution. Par conséquent, Δ n'est pas incluse dans P.

La proposition est **vraie**.