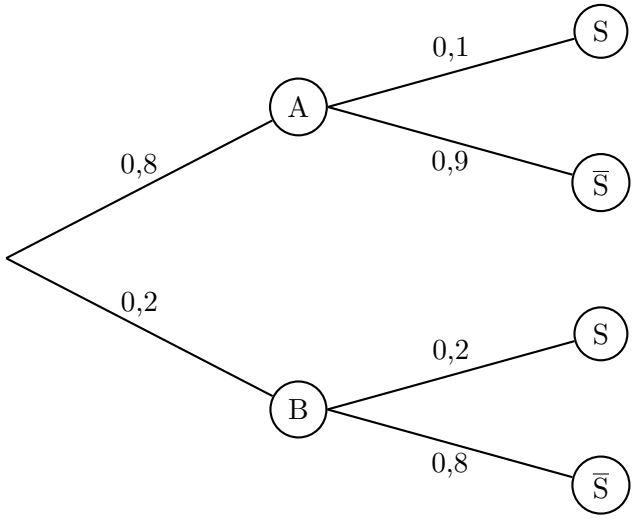
Correction du devoir commun n° 1

Exercice 1 :

1. L'arbre :



2. a. $P(B \cap S) = P(B) \times P_B(S) = 0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$

   b. D'après le principe des probabilités totales :

$$P(S) = P(B \cap S) + P(A \cap S) = P(B) \times P_B(S) + P(A) \times P_A(S)$$

$$P(S) = 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}1 = 0{,}12$$

   La probabilité que la boîte prélevée ne présente pas de trace de pesticide est $P(\overline{S})$.
   On a d'après la formule habituelle : $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

3. Ici, l'énoncé demande de calculer la probabilité que la boîte provienne du fournisseur B, sachant qu'elle présente des traces de pesticides, c'est à dire $P_S(B)$.
   On applique la formule : $P_S(B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}12} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 2 :

1. a. Le tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   b. On peut conjecturer que (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$.

2. a. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $u_n \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ».
   Il faut démontrer cette propriété pour tout n non nul, donc on initialise à 1 :
   Initialisation :
   On a $u_1 = \dfrac{1}{5} \times u_0 + 3 \times 0{,}5^0 = \dfrac{1}{5} \times 2 + 3 = 0{,}4 + 3 = 3{,}4$.
   D'autre part, $\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^1 = \dfrac{15}{8} = 1{,}875$.
   On a bien $3{,}4 \geq\ 1{,}875$ c'est à dire $u_1 \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^1$. $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   Hérédité :
   Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie : $u_n \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$.
   On veut démontrer $\mathcal{P}_{n+1}$, c'est à dire : $u_{n+1} \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$u_n \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$ donc on a successivement :

$\dfrac{1}{5}u_n \geq \dfrac{1}{5} \times \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$

$\dfrac{1}{5}u_n \geq \dfrac{3}{4} \times 0{,}5^n$

$\dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n \geq \dfrac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geq \dfrac{3}{4} \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$

$u_{n+1} \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$

Or, $0{,}5^n \geq 0{,}5^{n+1}$ donc $\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$

On a bien : $u_{n+1} \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

$\mathcal{P}_1$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.

Donc, d'après le principe du raisonnement par récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

b. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n = \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{5}{5}\right) u_n + 3 \times 0{,}5^n = -\dfrac{4}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$

Or, d'après le (a.), pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n$.

On en déduit : $\dfrac{4}{5}u_n \geq \dfrac{4}{5} \times \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n = 3 \times 0{,}5^n$.

Comme $\dfrac{4}{5}u_n \geq 3 \times 0{,}5^n$, alors $-\dfrac{4}{5}u_n \leq -3 \times 0{,}5^n$.

Par conséquent : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{4}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n \leq -3 \times 0{,}5^n + 3 \times 0{,}5^n$

On obtient : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c. D'après le (b.), u_n est décroissante à partir du rang 1. D'autre part, d'après le (a.), pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$. Donc (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente, d'après le théorème de convergence monotone.

3. a. $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1}$.

Ainsi : $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5^{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 5 \times 0{,}5^n = \dfrac{1}{5}u_n - 2 \times 0{,}5^n$

$v_{n+1} = \dfrac{1}{5}(u_n - 5 \times 2 \times 0{,}5^n) = \dfrac{1}{5}(u_n - 10 \times 0{,}5^n)$

Donc : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\frac{1}{5}(u_n - 10 \times 0{,}5^n)}{u_n - 10 \times 0{,}5^n} = \dfrac{1}{5}$.

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est une constante, donc (v_n) est géométrique. Sa raison est $\dfrac{1}{5}$.

Il reste à calculer v_0.

$v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = u_0 - 10 \times 1 = 2 - 10 = -8$.

b. Comme (v_n) est géométrique, alors pour tout n : $v_n = v_0 \times q^n$. Ici, $v_0 = -8$ et $q = \dfrac{1}{5}$, donc :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

Comme $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ alors $u_n = v_n + 10 \times 0{,}5^n$. En remplaçant v_n par l'expression qu'on vient de trouver, on obtient : $u_n = -8 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

c. $\frac{1}{5} \in]-1\,;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$
$0{,}5 \in]-1\,;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 \times 0{,}5^n = 0$.
En ajoutant, on trouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4. **Entrée :** `n et u sont des nombres`

   Initialisation : `n prend la valeur 0`
   `u prend la valeur 2`

   Traitement : `Tant que u >0,01`
   `n prend la valeur`
   `u prend la valeur` $\frac{1}{5}u + 3 \times 0{,}5^{n-1}$
   `Fin Tant que`

   Sortie : `Afficher n`

Voilà.