Correction du devoir surveillé nº5

Exercice 1 :

Partie A :

On a en posant $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ et $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$:

$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta)r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))$

$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$

On en déduit $|z_1z_2|=r_1r_2$ et $\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2+k2\pi$, ce qui s'écrit aussi :

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \text{ et } \arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2) .$$

Partie B :

1. On a : $z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos 3\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin 3\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\frac{\pi}{4}}$.
   D'après l'immortelle formule de De Moivre, on obtient :
   $z^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\left(\cos 3\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin 3\frac{\pi}{4}\right)^4=\frac{1}{4}\left(\cos\left(4\times 3\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(4\times 3\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{4}(\cos(3\pi)+\mathrm{i}\sin(3\pi))=-\frac{1}{4}$.
   On peut aussi utiliser la notation exponentielle : $z^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\frac{\pi}{4}}\right)^4=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3\frac{\pi}{4}\times 4}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3\pi}=-\frac{1}{4}$.
   Conclusion : **l'affirmation 1 est VRAIE**.
2. Si on choisit par exemple z = i, alors $\bar{z}=-\mathrm{i}$ donc $z+\bar{z}=0$. Pourtant, $z \neq 0$.
   Conclusion : **l'affirmation 2 est FAUSSE**.
3. On élimine d'abord la valeur interdite : on suppose $z \neq 0$.
   Alors l'équation $z+\frac{1}{z}=0$ est équivalente à : $z^2 + 1 = 0$, soit en factorisant : $(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}) = 0$.
   On obtient alors : z = i ou z = –i (et ce sont les seules solutions.)
   Conclusion : **l'affirmation 3 est VRAIE**.
4. On peut trouver deux complexes non nuls vérifiant les conditions données. En effet, on a vu en cours que si z=1 et $z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{\pi}{3}}$ alors $z+z'=1-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   On a bien : $|z|=|1|=1$ et $|z+z'|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right|=1$, pourtant $z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\frac{\pi}{3}}\neq 0$.
   Conclusion : **l'affirmation 2 est FAUSSE**.
   On peut prendre aussi z = 1 et z' = –2 ou z = 1 et z'= –1+i ou z =1 et z' = –1 + $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$).
   Plus généralement, il suffit de poser : $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et $z+z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$; alors $z'=z+z'-z=z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, et on voit bien que z' n'est pas toujours nul.

Exercice 2 :

1. Un point M (distinct de A) est invariant par f si M′ = M, c'est à dire $z' = z$.
   On cherche donc $z \neq$ –i tel que : $z=\frac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}$. C'est équivalent à :
   $$z(z+\mathrm{i})=\mathrm{i}z+3$$
   $$z^2+\mathrm{i}z=\mathrm{i}z+3$$
   $$z^2=3$$
   $$z=\sqrt{3} \text{ ou } z=-\sqrt{3} .$$
   On a donc deux point invariants $\mathrm{E}(\sqrt{3})$ et $\mathrm{F}(-\sqrt{3})$.
2. C'est du calcul : $z_{\mathrm{C'}}=\frac{\mathrm{i}(-2+\mathrm{i})+3}{(-2+\mathrm{i})+\mathrm{i}}=\frac{-2\mathrm{i}-1+3}{-2+2\mathrm{i}}=\frac{2-2\mathrm{i}}{-(2-2\mathrm{i})}=-1$.

L'affixe de C′ est un nombre réel, donc C′ appartient à l'axe des abscisses.

3. $\arg(z')=\arg\left(\dfrac{\mathrm{i}z+3}{z+\mathrm{i}}\right)=\arg\left(\dfrac{\mathrm{i}(z-3\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}\right)=\arg(\mathrm{i})+\arg\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z-(-\mathrm{i})}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{BM})+k2\pi$
   $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{BM})=(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})$ (faire un dessin). Donc $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})+k2\pi$.

4. On peut répondre à cette question de deux façons : en utilisant la question 3 ou directement par le calcul. En utilisant la question 3, on écrit :
   Comme z' est imaginaire pur, alors $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, autrement dit :
   $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.
   On remplace dans la formule de la question 3 :
   $\dfrac{\pi}{2}+k\pi=\dfrac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})+k'2\pi$ donc $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})=0+k\pi$.
   Autrement dit, les point A, B, M sont alignés.
   M ne peut pas être égal à A d'après l'énoncé ; mais est-ce que M peut être égal à B ? On doit traiter ce cas à part car lorsque M = B, l'angle $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})$ n'est pas défini.
   Si M = B, alors $z'=\dfrac{\mathrm{i}\times 3\mathrm{i}+3}{3\mathrm{i}+\mathrm{i}}=\dfrac{0}{4\mathrm{i}}=0$.
   0 fait bien partie des imaginaires purs, donc M peut être égal à B.

   Conclusion :
   L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est **la droite (AB) privée de A**.

5. M est un point du cercle de diamètre [AB] privé de A et B ; on sait alors (c'est une propriété classique de collège) que le triangle MAB est rectangle en M.
   Ainsi, $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ ou $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, soit : $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MB})=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.
   D'après la question 3, on peut alors écrire : $\arg(z')=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}+k\pi=0+k\pi$.
   Cela signifie que z' est un nombre réel.
   Le point M′ appartient donc à l'axe des abscisses.

Exercice 3 :

1. On calcule la dérivée : $v'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})=e^{-x}-xe^{-x}$.
   On a alors : $v'(x)+v(x)=e^{-x}-xe^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}$.
   La fonction v est donc bien une solution de l'équation différentielle (E).

2. C'est une équation de la forme $y'=ay$, avec $a=-1$. En effet, (E_0) s'écrit aussi : $y'=-y$.
   On sait que cette équation différentielle admet une infinité de solution qui sont toutes de la forme $f : f(x)=C e^{-x}$ où C est une constante réelle.

3. Il faut démontrer l'équivalence (« si et seulement si »).
   Remarque : On note $u-v$ la fonction $x\to u(x)-v(x)$
   On a : u est solution de (E)
   $\Leftrightarrow$ $u'(x)+u(x)=e^{-x}$
   $\Leftrightarrow$ $u'(x)+u(x)=v'(x)+v(x)$
   $\Leftrightarrow$ $u'(x)-v'(x)+u(x)-v(x)=0$
   $\Leftrightarrow$ $(u-v)'(x)+(u-v)(x)=0$
   $\Leftrightarrow$ $u-v$ est solution de l'équation (E_0).

4. D'après la question précédente : u est solution de (E) si et seulement si $u-v$ est solution de (E_0).
   D'après la question 2, c'est équivalent à :
   $u(x)-v(x)=Ce^{-x}$, c'est à dire : $u(x)=Ce^{-x}+xe^{-x}=(C+x)e^{-x}$.
   Les solutions de (E) sont donc les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x)=(C+x)e^{-x}$.

5. On cherche à présent une solution particulière, f_2, vérifiant la condition initiale : $f_2(0)=2$.
   On a donc : $f_2(0)=(C+0)e^{-0}=C=2$.

Donc la fonction f_2 est définie par : $f_2(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

6. La fonction f_k se présente comme un produit. On applique les règles sur les limites.
En $-\infty$:
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+k)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}(x+k)\mathrm{e}^{-x}=-\infty$$
En $+\infty$:
On sait (cours) que $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{x}=0$; donc en posant $y=-x$, on peut écrire : $\lim\limits_{y\to+\infty}-y\mathrm{e}^{-y}=0$.
On a donc :
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\mathrm{e}^{-x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}k\,\mathrm{e}^{-x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(x+k)\mathrm{e}^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\,\mathrm{e}^{-x}+k\,\mathrm{e}^{-x}=0\ .$$

7. $f_k'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+(x+k)\times(-\mathrm{e}^{-x})=(1-x-k)\mathrm{e}^{-x}$.

8. Comme e^{-x} est strictement positif pour tout x, alors $f_k'(x)$ est du signe de $1-x-k$.
$1-x-k\geq0\Leftrightarrow1-k\geq x$. On obtient donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$1-k$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{k-1}	$\searrow$	0

Exercice 4 :

1. Posons $u(x)=1+\mathrm{e}^{x}$ et $v(x)=\sqrt{(x)}$.
Alors $f(x)=v(u(x))$ et d'après le cours, on en déduit : $f'(x)=v'(u(x))\times u'(x)$.
$v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $v'(u(x))=\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}$ et $u'(x)=\mathrm{e}^{x}$.
Par conséquent : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}\times\mathrm{e}^{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{x}}}$.

2. Posons $u(x)=\ln x+1$ et $v(x)=\cos x$.
Alors $g(x)=v(u(x))$ et d'après le cours, on en déduit : $g'(x)=v'(u(x))\times u'(x)$.
$v'(x)=-\sin x$ donc $v'(u(x))=-\sin(u(x))=-\sin(\ln x+1)$ et $u'(x)=\dfrac{1}{x}$.
Par conséquent : $g'(x)=-\sin(\ln x+1)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{-\sin(\ln x+1)}{x}$.

Voilà.