Correction du devoir surveillé nº5

Exercice 1 :

C'est dans le cours.

Exercice 2 :

1. Soient A le point d'affixe 2 – 5i et B le point d'affixe 7 – 3i.
   Proposition 1 : le triangle OAB est rectangle isocèle.
   On calcule les trois distances :
   $\mathrm{OA}=|z_{\mathrm{A}}|=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$
   $\mathrm{OB}=|z_{\mathrm{B}}|=\sqrt{7^2+(-3)^2}=\sqrt{58}$
   $\mathrm{AB}=|z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}|=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$
   OA = AB donc OAB est isocèle de sommet principal A.
   On a d'autre part : $\overrightarrow{\mathrm{OA}}(2\,;-5)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(5\,;2)$.
   Donc $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\times5-5\times2=10-10=0$. Par conséquent, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
   Le triangle OAB est rectangle isocèle : **la proposition 1 est vraie**.

   Il y a une méthode plus rapide, mais il faut deviner que OAB est rectangle en A :
   L'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est 2 – 5i et l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = 5 + 2i$.
   Or 5 + 2i = i(2 – 5i).
   Ainsi : $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=\mathrm{i}\,z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}$ donc $|z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}|=|z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}|$ et $\arg(z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}})=\arg(z_{\overrightarrow{\mathrm{OA}}})+\frac{\pi}{2}+k2\pi$.
   Traduction : AB = OA et $(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$. Donc OAB est rectangle isocèle.

2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - \mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
   Méthode géométrique : Soient les points A d'affixe i, B d'affixe −2i.
   Alors $|z - \mathrm{i}|$ = MA et $|z + 2\mathrm{i}|$ = MB.
   Donc (Δ) est l'ensemble des points M tels que MA = MB : c'est la médiatrice de [AB].
   Comme A et B appartiennent à l'axe des imaginaires (c'est à dire l'axe des ordonnées), alors (Δ) est orthogonale à celui-ci, donc (Δ) est parallèle à l'axe des réels.
   Méthode algébrique :
   On pose $z = x + \mathrm{i}y$.
   $|z - \mathrm{i}| = |z + 2\mathrm{i}|$ équivaut à $|z - \mathrm{i}|^2 = |z + 2\mathrm{i}|^2$ (ça simplifie les calculs).
   On applique la définition : $x^2+(y-1)^2=x^2+(y+2)^2$.
   Ceci équivaut à : $(y-1)^2-(y+2)^2=0$ soit $(y-1-y-2)(y-1+y+2)=0$ soit $(2y+1)=0$ et enfin $y=-\frac{1}{2}$. C'est bien l'équation d'une droite parallèle à l'axe des réels.
   La proposition 2 est vraie.

3. Soit $z = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
   Méthode futée : on fait un raisonnement par l'absurde.
   Supposons que la proposition soit vraie. Comme la proposition est vraie pour n, elle est aussi vraie pour $2n$. Prenons par exemple $n = 1$.
   Alors z^3 est imaginaire pur, et z^6 est aussi imaginaire pur.
   Or, $z^6 = z^{3\times2} = (z^3)^2$. Oui mais le carré d'un imaginaire pur est un réel.
   En effet, soit y un réel, $(\mathrm{i}y)^2 = \mathrm{i}^2y^2 = -y^2$.
   Ainsi z^6 est à la fois imaginaire pur et réel, donc il vaut 0.

Mais alors on a $|z^6| = 0$, donc $|z|^6 = 0$ donc $|z| = 0$ donc $z = 0$, ce qui est impossible.
Donc **la proposition 3 est fausse**.

Méthode assez futée : on passe en forme exponentielle :

$$3+\mathrm{i}\sqrt{3}=\sqrt{12}\left(\frac{3}{\sqrt{12}}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

Alors $\arg(z)=\frac{\pi}{6}$.

D'après l'immortelle formule de de Moivre, on a : $\arg(z^{3n})=3n\arg(z)=3n\times\frac{\pi}{6}=n\frac{\pi}{2}$.

On voit donc en considérant son argument que z^{3n} est imaginaire pur lorsque n est impair et réel lorsque n est pair.

Méthode moins futée : faire les calculs en forme algébrique...
J'ai demandé à Maxima :

```
(%i3) z:3+%i*sqrt(3);
(%o3) sqrt(3)*%i+3
(%i4) z^3;
(%o4) (sqrt(3)*%i+3)^3
(%i5) rectform(%);
(%o5) (3^(7/2)-3^(3/2))*%i
(%i6) z^6;
(%o6) (sqrt(3)*%i+3)^6
(%i7) rectform(%);
(%o7) -1728
```

Donc $z^6 = -1728$. Ce n'est pas un imaginaire pur, cela s'entend.

4. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors $|\mathrm{i} + z| = 1 + |z|$.

C'est assez simple. Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors $z = \mathrm{i}k$, où k est un réel *positif*.

Or pour tout nombre réel positif a : $|a|=a$.

On peut donc écrire : $|\mathrm{i} + z| = |\mathrm{i} + \mathrm{i}k| = |\mathrm{i}| \times |1 + k| = 1\times(1+k) = 1+k$.
Et : $1 + |z| = 1 + |\mathrm{i}k| = 1 + |\mathrm{i}|\,|k| = 1+k$.
On trouve la même valeur. Donc **la proposition 4 est vraie**.

5. Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1, alors $z^2+\frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Méthode astucieuse :
Si le module de z est égal à 1, alors c'est aussi le cas pour z^2.
En effet : $|z^2|=|z|^2=1^2=1$.
La présence du carré n'a donc pas d'importance : on est ramené à montrer que pour tout nombre complexe z de module 1, $z+\frac{1}{z}$ est réel.

Or : $z+\frac{1}{z}=z+\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=z+\frac{\bar{z}}{|z|^2}=z+\frac{\bar{z}}{1}=z+\bar{z}$.

On a vu dans le cours que $z+\bar{z}$ est un nombre réel, plus précisément : $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$.
La proposition 5 est donc vraie.

Autre méthode astucieuse : utiliser la notation exponentielle.

Soit α un argument de z. Comme $|z|=1$, on a : $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.

Alors $z^2+\frac{1}{z^2}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^2+\frac{1}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^2}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}+\frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}=\cos(2\alpha)+\mathrm{i}\sin(2\alpha)+\cos(-2\alpha)+\mathrm{i}\sin(-2\alpha)$.

Or, on sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$.

On obtient alors : $z^2+\frac{1}{z^2}=\cos(2\alpha)+\mathrm{i}\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha)-\mathrm{i}\sin(2\alpha)=2\cos(2\alpha)$. C'est bien un nombre réel.

Exercice 3 (Centres étrangers 2010) :

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a=-1$ et l'application f du plan(P) dans lui-même qui au point M d'affixe z, distinct de A, associe le point $\mathrm{M}'=f(\mathrm{M})$ d'affixe : $z'=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}$.

1. Remarquons d'abord que vu que M est distinct de A, $z\neq-1$ donc $z+1\neq0$, donc z' existe.

   $\mathrm{M}'=\mathrm{M}$ équivaut à $z'=z$, soit : $z=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}$. Comme $z+1\neq0$, c'est équivalent à : $z(z+1)=\mathrm{i}z$ soit $z(z+1)-\mathrm{i}z=0$ ou $z(z+1-\mathrm{i})=0$. C'est une équation produit nul qui se résout de la manière habituelle : on obtient $z=0$ ou $z=-1+\mathrm{i}$. La vérification est facile.

2. De la relation $z'=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}$, on déduit :

   - $|z'|=\left|\frac{\mathrm{i}z}{z+1}\right|=|i|\frac{|z|}{|z+1|}=\frac{|z|}{|z+1|}$; or $|z'|=\mathrm{OM}'$; $|z|=\mathrm{OM}$; $|z+1|=|z-a|=\mathrm{AM}$.

   On obtient donc : $\mathrm{OM}'=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AM}}$

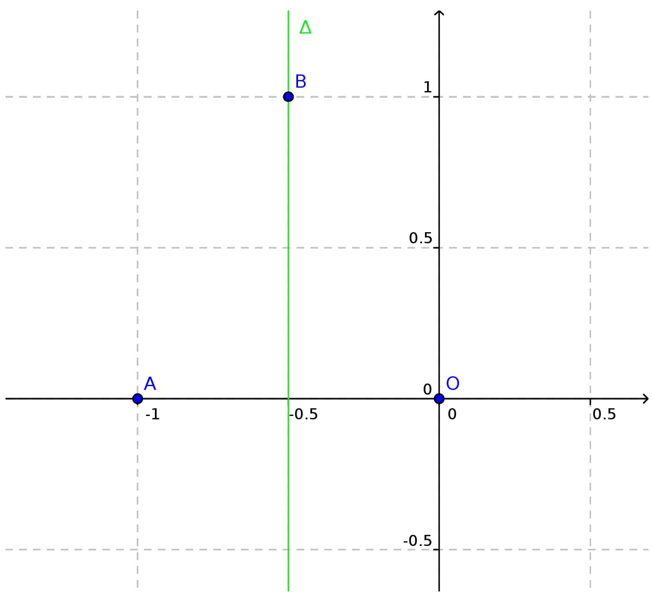
   - $\arg(z')=\arg\left(\frac{\mathrm{i}z}{z+1}\right)=\arg(i)+\arg\left(\frac{z}{z+1}\right)$.

   Or, $\arg(z')=(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}'})$; $\arg\left(\frac{z}{z+1}\right)=\arg\left(\frac{z-z_{\mathrm{O}}}{z-a}\right)=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}})=(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{MO}})$ et $\arg(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

   On en déduit :
   $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OM}'})=(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{MO}})+\frac{\pi}{2}+k2\pi$

3. Soit B le point d'affixe $b=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}$.

   a.

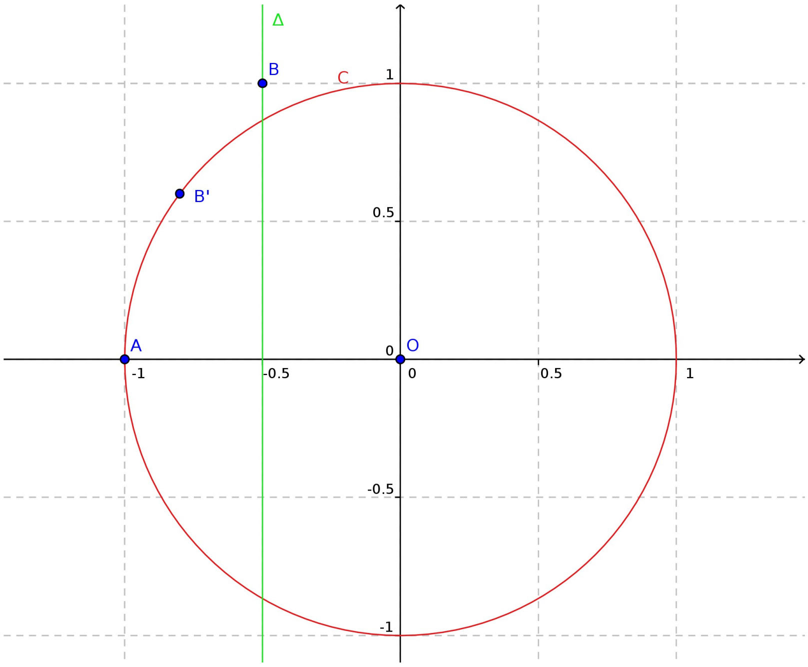


b. C'est du calcul :

$$b'=\frac{\mathrm{i}\,b}{b+1}=\frac{\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)}{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}+1}=\frac{-1-\frac{1}{2}\mathrm{i}}{\frac{1}{2}+\mathrm{i}}=\frac{\left(-1-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)}{\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\right)}=\frac{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right)}{\left(\frac{1}{4}+1\right)}=\frac{-1+\frac{3}{4}\mathrm{i}}{\frac{5}{4}}=\frac{-4+3\mathrm{i}}{5}$$

B′ appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1 si et seulement si OB′ = 1 soit $|b'|=1$.

Or : $|b'|=\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1$.



c. Si M appartient à (Δ), alors OM=AM (propriété classique).

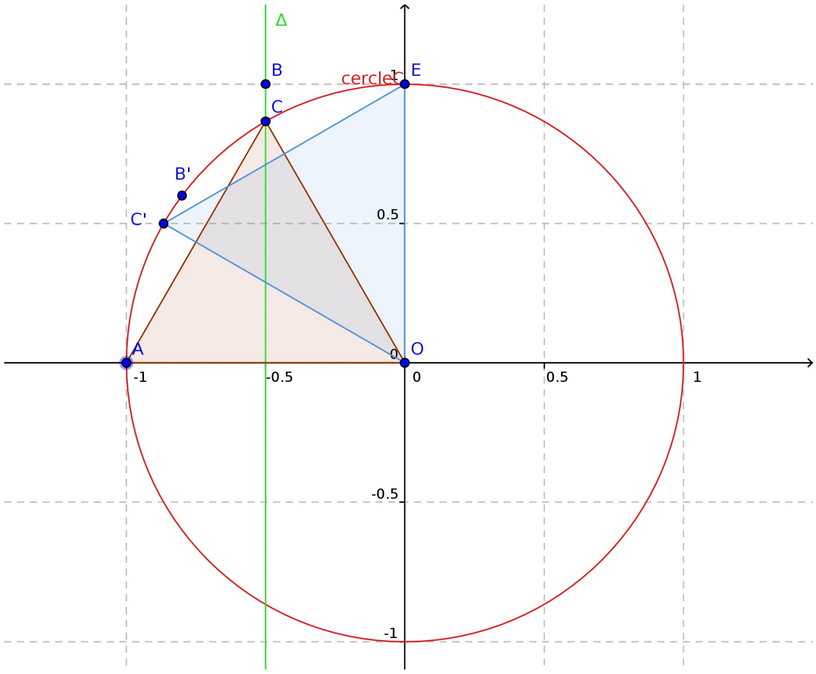
Donc, d'après la qu. 2 : $\mathrm{OM}'=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{AM}}=1$. OM′ = 1, donc M′ appartient à (C).

d. AOC est équilatéral direct, donc on a OC = AC et $(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{CO}})=\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

OC = AC, donc C′ appartient au cercle (C) d'après la question précédente.
D'autre part, on a d'après la question 2 :

$$(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OC}'})=(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{CO}})+\frac{\pi}{2}+k2\pi=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+k2\pi=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ .$$

On voit qu'en appelant E le point d'affixe i, OEC′ est équilatéral direct, ce qui permet de construire C' à la règle et au compas.



4.

a. $z'=\frac{\mathrm{i}z}{z+1}=\frac{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}{x+\mathrm{i}y+1}=\frac{-y+\mathrm{i}x}{(x+1)+\mathrm{i}y}=\frac{(-y+\mathrm{i}x)((x+1)-\mathrm{i}y)}{((x+1)+\mathrm{i}y)((x+1)-\mathrm{i}y)}=\frac{-yx-y+xy+\mathrm{i}(x^2+x+y^2)}{(x+1)^2+y^2}$

$z'=\frac{-y+\mathrm{i}(x^2+x+y^2)}{(x+1)^2+y^2}$

La partie imaginaire est donc : $\mathrm{Im}(z')=\frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$

Le point M′ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si Im(z') = 0, ce qui donne :

$x^2+x+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+y^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}=\frac{1}{2}$.

Soit Ω le point d'affixe $-\frac{1}{2}$; $\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2}=\Omega M$ donc ΩM = $\frac{1}{2}$.

Par conséquent, M′ appartient à l'axe des abscisse si et seulement si M appartient au cercle (Γ) de centre Ω et de rayon R = $\frac{1}{2}$.

b. M′ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM'})=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

Or, d'après la question 2 : $(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM'})=(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MO})+\frac{\pi}{2}+k2\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$.

On obtient : $(\overrightarrow{MA}\ ;\ \overrightarrow{MO})=(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM'})-\frac{\pi}{2}+k2\pi=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Ainsi, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MO}$ sont orthogonaux.

Donc, d'après le théorème classique, M appartient au cercle de diamètre [OA]. C'est bien le cercle (Γ) de la question précédente.

Exercice 4 :

On définit sur ℝ la fonction f par : $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$.

1. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-\exp(0)}{x}=\exp'(0)=1$ (méthode à connaître)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$; d'autre part $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{x} = -1 \times 0 = 0$

On voit que : $f(0) = 1$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, alors par définition, f est continue en 0.

2. La fonction f est un quotient de fonctions dérivables ; elle est donc dérivable partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire pour tout $x \neq 0$.

$f'(x) = \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

Comme le dénominateur est un carré, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. On sait que $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0$.

3.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est de plus strictement croissante d'après le tableau.

De plus, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, pour tout $k \in]0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique.