# Mathématiques - Devoir surveillé n°7

## Exercice 1

*Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte* 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de $z^2$ est :

$$\text{A} : \quad 2\sqrt{2} \qquad B : \quad 2\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2} \qquad \text{C} : \quad 2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right) \qquad D : \quad 2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$$

2. $z^2$ s'écrit sous forme exponentielle :

$$\text{A} : \quad 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \text{B} : \quad 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \text{C} : \quad 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} \qquad \text{D} : \quad 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

3. $z$ s'écrit sous forme exponentielle :

$$\text{A} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}} \qquad \text{B} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}} \qquad \text{C} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}} \qquad \text{D} : \quad 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

$$\text{A} : \quad \frac{7\pi}{8} \qquad \text{B} : \quad \frac{5\pi}{8} \qquad \text{C} : \quad \frac{3\pi}{8} \qquad \text{D} : \quad \frac{\pi}{8}$$

## Exercice 2

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées $z'$ et $z''$, $z'$ désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

## Exercice 3

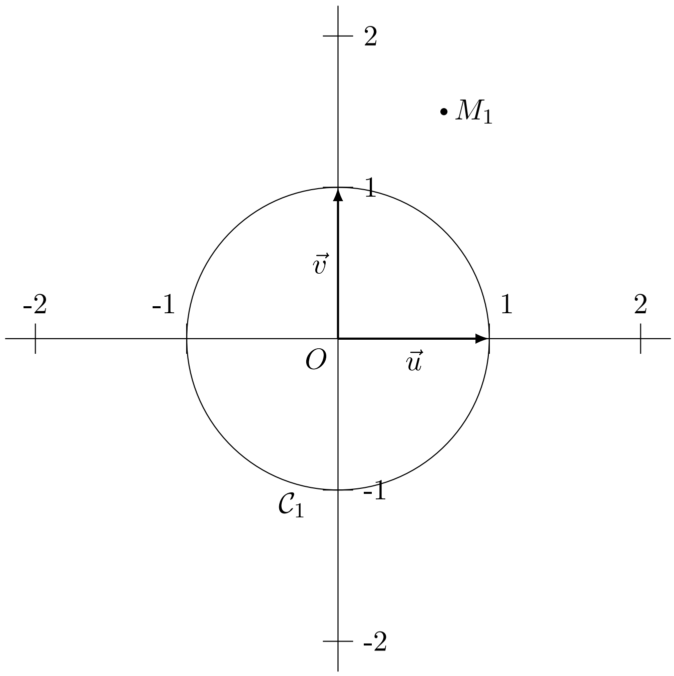
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère l'application $f$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}\left(2 - |z|\right).$$

Le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre O et de rayon 1, est représenté sur la figure, donnée en annexe, que l'on complétera au fur et à mesure des questions. Pour $z$ complexe non nul, on note $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $r$ étant le module de $z$ et $\alpha$ un argument de $z$.

1. Montrer que $z' = (2-r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
2. Déterminer l'affixe $a'$ du point A', image par $f$ du point A d'affixe $a = 3$.

3. Soit B le point d'affixe $b = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
   (a) Écrire $b$ sous forme exponentielle.
   (b) Déterminer l'affixe $b'$ du point B$'$, image du point B par $f$.
4. Placer A, B, A$'$ et B$'$ sur la figure..
5. (a) Déterminer l'ensemble $E$ des points $M$ du plan privé du point O dont l'image par $f$ est O.
   (b) Représenter $E$ sur la figure.
6. Montrer que le cercle $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des points $M$ du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.
7. Pour cette question, $M$ est un point du plan, distinct de O, n' appartenant pas au cercle $\mathcal{C}_1$. On appelle I le milieu du segment $[MM']$ où $M'$ est l'image de $M$ par $f$.
   (a) Montrer que I appartient à $\mathcal{C}_1$.
   (b) Montrer que I appartient à la demi-droite $[\mathrm{O}M)$.
   (c) Sur la figure donnée en annexe est placé un point nommé $M_1$. Construire le point $M_1'$, image par $f$ du point $M_1$.




## Exercice 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm. On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$. On note $A_n$ le point du plan d'affixe $z_n$.

1. Calculer $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et vérifier que $z_4$ est un nombre réel. Placer les points A$_0$, A$_1$, A$_2$, A$_3$ et A$_4$ sur une figure.
2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = |z_n|$. Justifier que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique puis établir que, pour tout enfler naturel $n$,
$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
3. À partir de quel rang $n_0$ tous les points $A_n$ appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?
4. **Question bonus**
   (a) Établir que, pour tout entier naturel $n$, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$. En déduire la nature du triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$.
   (b) Pour tout entier naturel $n$, on note $\ell_n$ la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer $\ell_n$, en fonction de $n$. Quelle est la limite de la suite $(\ell_n)$ ?