MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº7

Exercice 1 :

1. Réponse B.
   $z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2-2\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}+\left(\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$
   $z^2=2+\sqrt{2}-2\mathrm{i}\times\sqrt{(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})}-(2-\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+2\mathrm{i}\times\sqrt{2^2-\sqrt{2}^2}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\times\sqrt{4-2}$
   $z^2=2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. Réponse B.
   $|z^2|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{8+8}=4$
   Soit θ un argument de z.
   On a : $\cos(\theta)=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{-2\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ soit $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$.

3. Réponse A.
   $\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}\right)^2=4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}\times 2}=4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}=4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ car $\dfrac{7\pi}{4}=\dfrac{-\pi}{4}+2\pi$.

4. Réponse D.
   On a $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}=2\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)\right)=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ d'où :
   $\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)=\dfrac{-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   On cherche donc une valeur x telle que $\cos(x)=-\cos\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$ et $\sin(x)=\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)$. Les sinus étant identiques et les cosinus opposés, on trouve facilement : $x=\pi-\dfrac{7\pi}{8}=\dfrac{\pi}{8}$.
   Bien sûr, il y a une infinité d'autres solutions pour x.

Exercice 2 :

1. $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12$. Il y a donc deux racines complexes (conjuguées) :
   $z'=\dfrac{-(-2)+\mathrm{i}\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z''=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.
   D'autre part : $|z'|=\sqrt{1+3}=2$ donc $z'=2\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
   De même : $z''=2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. $(z')^{2004}=\left(2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2004}=2^{2004}\times\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)^{2004}=2^{2004}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}\times2004}=2^{2004}\times\mathrm{e}^{668\mathrm{i}\pi}$.
   Or $\mathrm{e}^{668\mathrm{i}\pi}=\cos(668\pi)+\mathrm{i}\sin(668\pi)=\cos(0)+\mathrm{i}\sin(0)=1$, puisque cos et sin sont de période 2π.
   Donc $(z')^{2004}=2^{2004}$.

   Une valeur approchée : $2^{2004}\simeq1.837\times10^{603}$. C'est un gros nombre...

Exercice 3 :

1. Puisque $|z|=r$, on a : $z'=\dfrac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{r}(2-r)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2-r)$.

2. $a'=\dfrac{3}{|3|}\times(2-|3|)=\dfrac{3}{3}(2-3)=-1$

3.

a) $b=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.

b) Utilisons la formule de la question (1) : $b'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}(2-2)=0$.

4.

5. L'image du point M est 0 ; autrement dit : $z'=0$.
On résout : $z'=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2-r)=0$.
Or pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=\cos(\alpha)+\mathrm{i}\sin(\alpha)\neq 0$ car les cosinus et le sinus d'un même nombre ne peuvent pas être simultanément égaux à 0.

Par conséquent : $z'=0\Leftrightarrow 2-r=0\Leftrightarrow r=2$.
L'ensemble E est donc le cercle de centre O et de rayon 2.

6. Il faut prouver l'équivalence entre : $f(M)=M$ et $M\in C_1$.
$f(M)=M\Leftrightarrow z'=z\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2-r)=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2-r)-r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2-2r)=0$.
Comme précédemment, on sait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\neq 0$.
Donc $f(M)=M\Leftrightarrow 2-2\mathrm{r}=0\Leftrightarrow r=1\Leftrightarrow M\in C_1$.

7.

a) Soit z_I l'affixe de *I*. Comme *I* est le milieu de [*MM'*], alors $z_I=\frac{z+z'}{2}$.
Ainsi : $z_I=\frac{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(2-r)}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(r+2-r)}{2}=\frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$.
Par conséquent : $|z_I|=1$ et $\arg(z_I)=\alpha$.
Comme $|z_I|=1$, alors $I\in C_1$.

b) On vient de voir que $\arg(z_I)=\alpha$, c'est à dire : $\arg(z_I)=\arg(z)$.
Autrement dit : $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OI})=(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont donc colinéaires et de même sens. Par conséquent, *I* appartient à la demi-droite [*OM*).

Exercice 4 :

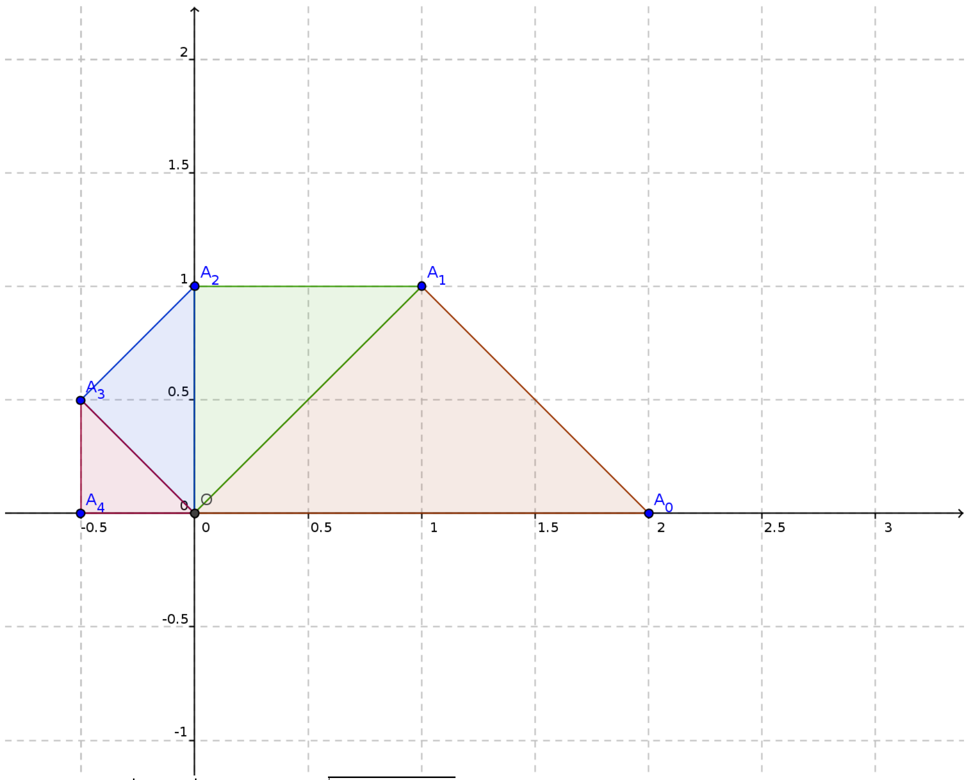
1. $z_1=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\times 2=1+\mathrm{i}$

$z_2=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)(1+\mathrm{i})=\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}=\frac{1+2\mathrm{i}-1}{2}=\mathrm{i}$

$z_3=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\times\mathrm{i}=\frac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2}=\frac{-1+\mathrm{i}}{2}$

$z_4=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{-1+\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{2\times 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

On remarque que z_4 est bien un réel.



2. On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, donc la suite (u_n) est géométrique, et la raison est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   On en déduit : $u_n=u_0\times q^n=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

   Rappelons que cette formule est à savoir, mais on n'a pas besoin de la redémontrer, c'est du cours.

3. A_n appartient au disque de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si $|z_n|\leq 0{,}1$, autrement dit $u_n\leq 0{,}1$.

   On résout :

   $$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\leq 0{,}1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\leq 0{,}05\Rightarrow\ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right]\leq\ln(0{,}05)\Rightarrow n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\leq\ln(0{,}05)\Rightarrow -n\ln(\sqrt{2})\leq\ln(0{,}05)$$

   $$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\Rightarrow n\geq\frac{\ln(0{,}05)}{-\ln(\sqrt{2})}\ .$$

   On trouve : $\frac{\ln(0{,}05)}{-\ln(\sqrt{2})}\simeq 8{,}64$.

   Comme n est un entier naturel, il faut choisir $n_0=9$.

4.

   a) $$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}=\frac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n-z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n}=\frac{\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}-1\right)z_n}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n}=\frac{\frac{1+\mathrm{i}}{2}-1}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}}=\frac{\frac{-1+\mathrm{i}}{2}}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}}=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1+\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$$

   On a donc : $\frac{A_nA_{n+1}}{\mathrm{O}A_{n+1}}=\frac{|z_{n+1}-z_n|}{|z_{n+1}|}=\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n}\right|=|\mathrm{i}|=1$

   et : $(\overrightarrow{\mathrm{O}A_{n+1}};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})=\arg\left(\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}\right)=\arg(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

   Donc le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle et isocèle en A_{n+1} .

   b) D'après la question précédente, pour tout n, $\mathrm{O}A_{n+1}=A_nA_{n+1}$.

Donc, $l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \ldots + A_{n-1} A_n = \mathrm{O} A_1 + \mathrm{O} A_2 + \ldots + \mathrm{O} A_n$.
On a donc : $l_n = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Comme (u_n) est géométrique, on peut appliquer la formule donnant la somme de n termes consécutifs :

$$l_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2}-1}$$

Limite de (l_n) :

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ est compris strictement entre -1 et 1, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} l_n = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1) \simeq 4{,}83$.

Voilà.