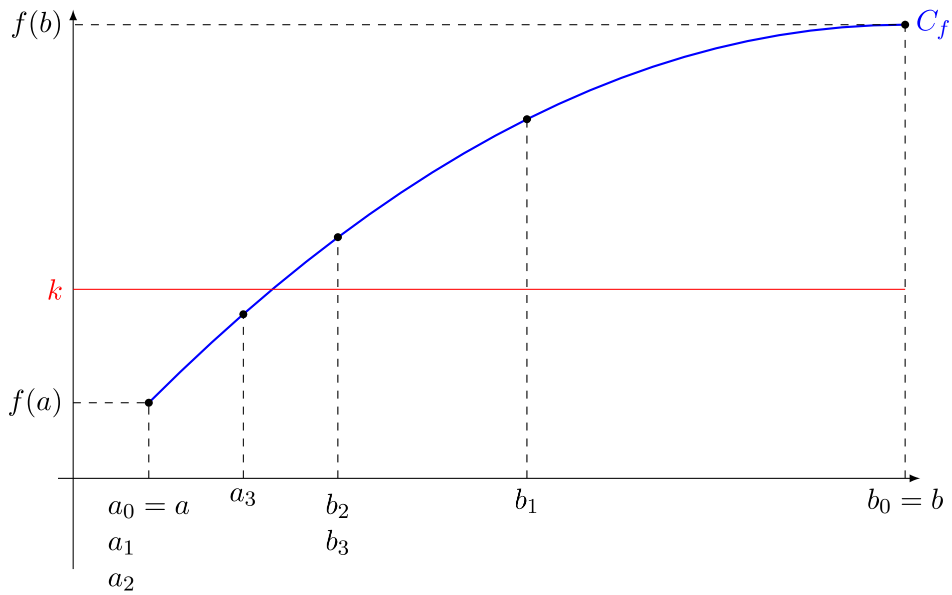
Continuité - Correction de l'exercice 6

1. Par exemple avec la courbe suivante (on a représenté les 4 premiers termes) :



2. Démontrons-le par récurrence.
   C'est vrai pour $n = 0$ car $a < b$. Or, $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a donc bien $a_0 < b_0$.
   Supposons que $a_n < b_n$ pour un certain n.
   On a $m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, donc $a_n < m < b_n$. D'après l'algorithme, on a à l'étape suivante, suivant le cas :
   - soit $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$, et alors $a_{n+1} < b_{n+1}$,
   - soit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$, et alors $a_{n+1} < b_{n+1}$.

   Dans tous les cas, $a_{n+1} < b_{n+1}$.
   Résumons :
   La propriété $a_n < b_n$ est vraie pour $n = 0$.
   Si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$.
   D'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À chaque étape, suivant le cas, on a :
   soit $a_{n+1} = a_n$, et alors $a_{n+1} = a_n$,
   soit $a_{n+1} = m$ et alors $a_{n+1} > a_n$.
   Dans tous les cas, $a_{n+1} \geq a_n$, donc la suite (a_n) est croissante.
   On prouve de la même façon que (b_n) est décroissante.
4. On a pour tout n : $a_n < b_n$ (d'après la qu.2). D'autre part, comme (b_n) est décroissante, on a pour tout n : $b_n \leq b_0$.
   Donc, pour tout n, $a_n < b_0$. Autrement dit, la suite (a_n) est *majorée* par b_0.
   Ainsi, la suite (a_n) est croissante et majorée, donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.
5. On prouve par le même type de raisonnement que la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0. Donc elle est convergente.
   Démontrons que sa limite est la même que celle de (a_n).
   D'après l'algorithme, la largeur de l'intervalle $[a_{n+1}\,; b_{n+1}]$ est la moitié de la largeur de l'intervalle $[a_n\,; b_n]$. Si on appelle l_n la largeur de l'intervalle $[a_n\,; b_n]$, on a donc pour tout n : $l_{n+1} = \dfrac{1}{2} l_n$.
   Donc la suite (l_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$, et de premier terme $l_0 = b - a$.

Comme $\frac{1}{2} \in]-1\,;1[$, $\lim_{n\to+\infty} l_n = 0$.

Autrement dit, quand n devient très grand, b_n devient infiniment proche de a_n. Mais d'autre part, comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$, a_n devient infiniment proche de c.

Ceci montre que b_n devient lui aussi infiniment proche de c. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} b_n = c$.

6. Comme f est continue, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

   Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$, quand n devient très grand, a_n devient infiniment proche de c, et donc, d'après ce qui précède, $f(a_n)$ devient infiniment proche de $f(c)$.

   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$.

   Le raisonnement est le même pour (v_n).

7. Démontrons-le par récurrence.

   On a $u_0 = f(a_0) \leq k$, car d'après l'énoncé, k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

   Supposons que $u_n = f(a_n) \leq k$. À l'étape suivante, on a suivant le cas :
   - Soit $f(m) \leq k$. Dans ce cas, on pose $a_{n+1} = m$, donc évidemment $f(a_{n+1} \leq k$.
   - Soit $f(m) > k$. Dans ce cas $a_{n+1} = a_n$, et comme on a supposé $f(a_n) \leq k$, on a bien sûr $f(a_{n+1}) \leq k$.

   Dans tous les cas, $f(a_{n+1}) \leq k$, c'est à dire $u_{n+1} \leq k$.

   Conclusion :

   La propriété $u_n \leq k$ est vraie au rang $n = 0$.

   Si elle est vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n + 1$.

   D'après le principe du raisonnement par récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On prouve de la même façon que pour tout n, $v_n \geq k$.

8. On applique la propriété de « passage des inégalités larges à la limite ».

   Comme $u_n \leq k$ pour tout n, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq k$.

   Remarque :

   Cette propriété se démontre très facilement par l'absurde. En effet, supposons qu'on ait à la fois $u_n \leq k$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} u_n > k$.

   Appelons l cette limite et $d = l - k$ la distance entre l et k. Comme $u_n \leq k$ pour tout n, la distance entre chacun des u_n et l est $\geq d$. Mais comme l est la limite de (u_n), cette distance doit devenir aussi petite qu'on veut lorsque n est assez grand.

   Il y a là une contradiction logique. Par conséquent, on ne peut avoir à la fois $u_n \leq k$ pour tout n et $\lim_{n\to+\infty} u_n > k$. Si $u_n \leq k$ pour tout n alors $\lim_{n\to+\infty} u_n \leq k$.

   Fin de la démonstration.

   Même raisonnement pour (v_n) : Comme $v_n \geq k$ pour tout n, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n \geq k$.

   Or, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = f(c)$ d'après la question 6.

   On a donc à la fois : $f(c) \leq k$ et $f(c) \geq k$. Ceci montre que : $f(c) = k$.

   Autrement dit, il existe bien un nombre c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. Le théorème est démontré.

9. On peut compléter ainsi :

```
Variables :
n : nombre entier
A, B, m, k : nombres réels

Début de l'algorithme
n prend la valeur 0
A prend la valeur a (borne gauche de l'intervalle)
B prend la valeur b (borne droite de l'intervalle)

Tant que (B-A) > 10^(-3) faire :
      m prend la valeur : (A+B)/2
      Si f(m) <= k
          alors : A prend la valeur m
          sinon : B prend la valeur m
Fin tant que

Afficher l'encadrement A ; B
```

10. On voit que l'algorithme précédent fonctionne tant que $f(a) < f(b)$. En effet, il n'y a aucun changement dans le résultat des questions 2. à 8.
    Si $f(a) > f(b)$, il suffit de remplacer « `Si f(m) <= k` » par « `Si f(m) >= k` »