Continuité - Exercices

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \text{ si } x < 1 \\ f(x) = 2x - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Démontrer que f est continue et représenter f sur $[-3\,;3]$.

Exercice 2 :

Soit g la fonction « valeur absolue ».

1. La fonction g est-elle continue ?
2. Sa dérivée est-elle continue ?

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 1$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution α sur $[0\,;1]$ et aucune sur $]1\,;+\infty[$.
3. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.
2. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 5 :

Soit f une fonction continue sur $[0\,;1]$ et à valeurs dans $[0\,;1]$.

Démontrer qu'il existe (au moins) un réel $\alpha \in [0\,;1]$ vérifiant $f(\alpha) = \alpha$. Illustrer ceci à l'aide d'un schéma.

Exercice 6 :

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction monotone. On utilise pour cela un algorithme de dichotomie. On examine le cas où la fonction est croissante, le cas où elle est décroissante se traite de la même façon.

Soit f une fonction continue et croissante sur l'intervalle $[a\,;b]$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On veut démontrer qu'il existe un nombre $c \in [a\,;b]$ tel que $f(c) = k$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule $m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
  Si $f(m) \leq k$, alors on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$.
  Si $f(m) > k$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$.

1. Représenter les trois premiers termes de chacune des deux suites sur un dessin.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.
3. Montrer que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante.
4. Montrer que la suite a_n est convergente. Soit c sa limite.
5. Montrer que (b_n) est convergente et a la même limite c.
6. On pose pour tout n : $u_n = f(a_n)$ et $v_n = f(b_n)$. Montrer que (u_n) et (v_n) ont toutes les deux pour limite $f(c)$ (on utilise le fait que f est continue.)
7. Montrer que pour tout n, $u_n \leq k$ et $v_n \geq k$.
8. En déduire que $f(c) \leq k$ et que $f(c) \geq k$. Conclure.
9. On peut utiliser l'algorithme précédent pour obtenir une valeur approchée de c. En effet, il est clair que pour tout n, c appartient à l'intervalle $[a_n\,;b_n]$.
   Compléter l'algorithme suivant pour qu'il donne un encadrement de c d'amplitude $\leq 10^{-3}$.

```
Variables :
n : nombre entier
A, B, m, k : nombres réels

Début de l'algorithme
n prend la valeur 0
A prend la valeur a (borne gauche de l'intervalle)
B prend la valeur b (borne droite de l'intervalle)

Tant que (B-A) ... ... faire :
      m prend la valeur : ... ...
      Si f(m) ... ...
          alors : ... ... ...
          sinon : ... ... ...
Fin tant que

Afficher l'encadrement A ; B
```

10. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il fonctionne lorsque f est quelconque (non monotone) ?