MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº3

Question de cours (Nouvelle Calédonie, novembre 2007) – 2 points :

1. Soit f une fonction réelle définie sur $[a\ ;+\infty[$. Compléter la phrase suivante :
   « On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si … »
2. Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient f, g, h, trois fonctions définies sur $[a\ ;+\infty[$ et ℓ un nombre réel. Si g et h ont pour limite commune ℓ quand x tend vers $+\infty$, et si pour tout x assez grand $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$, alors la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à ℓ.

Exercice 1 (d'après Polynésie, septembre 2010) – 9 points :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-x\,\mathrm{e}^x+1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variation de g.
4.
   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;+\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   c. Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;+\infty[$ telle que : $A(x)=\dfrac{4x}{\mathrm{e}^x+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de A en $+\infty$ et en déduire que la représentation graphique de A admet en $+\infty$ une asymptote horizontale.

Exercice 2 : (d'après Amérique du Nord, juin 2011) – 9 points :

Partie A

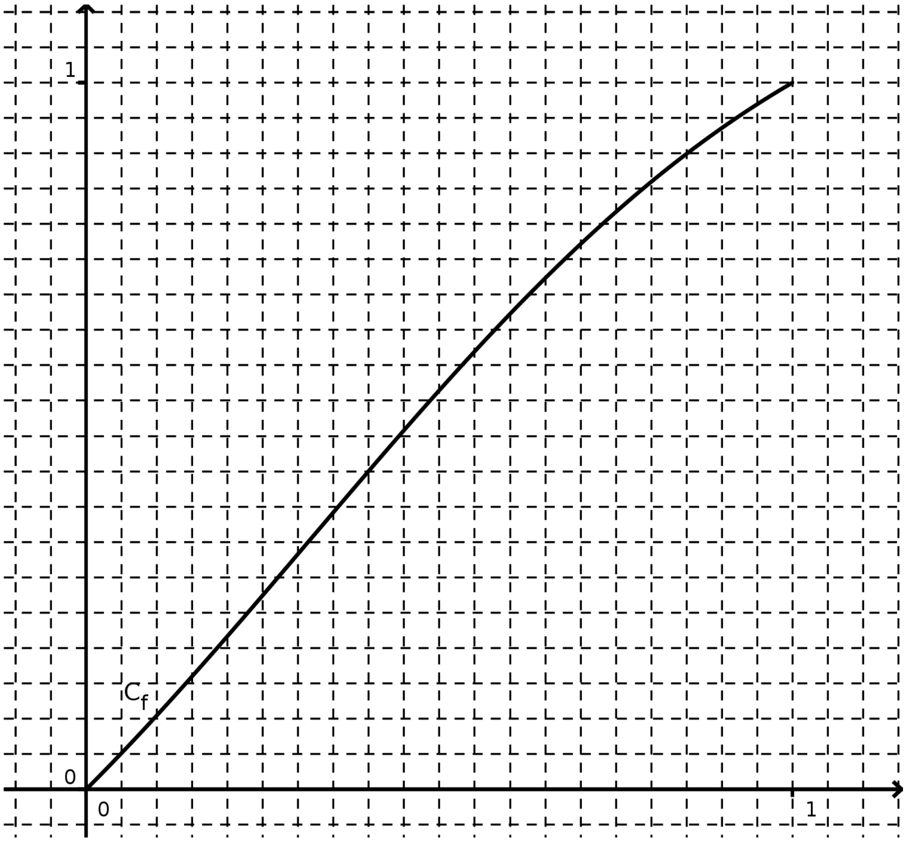
On considère la fonction g définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $g(x)=\mathrm{e}^x-x-1$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. En déduire que pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $\mathrm{e}^x-x>0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-après :



La figure sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.

   a. Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.

   b. Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0 ; 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.