Correction du devoir surveillé nº3

Question de cours :

1. On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si quel que soit le réel $r > 0$, $f(x) \in]\ell - r ; \ell + r[$ pour x assez grand.
   Autre version : On dit que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ lorsque x est suffisamment grand.
2. Soit r un nombre réel strictement positif quelconque.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$, alors pour x assez grand, $g(x) \in]\ell - r ; \ell + r[$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors pour x assez grand, $h(x) \in]\ell - r ; \ell + r[$.
   Pour x assez grand, on a aussi $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ d'après l'énoncé.
   Pour x assez grand, ces trois conditions sont remplies simultanément, et on a par conséquent :
   $\ell - r \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + r$. Ceci implique : $\ell - r \leqslant f(x) \leqslant \ell + r$.
   Résumons :
   Pour tout r réel strictement positif quelconque, $f(x) \in]\ell - r ; \ell + r[$ lorsque x est assez grand.

   Ceci traduit le fait que la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est ℓ.

Exercice 1 :

Partie A

1. $g(x) = \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + 1 = \mathrm{e}^x(1-x) + 1$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x(1-x) = -\infty$.
   Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
2. $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \cdot \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + 0 = -x\,\mathrm{e}^x$; pour $x>0$, $-x$ est strictement négatif et e^x est strictement positif, donc le produit est strictement négatif.
   Ainsi, $g'(x)$ est strictement négatif, donc g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
3. On obtient le tableau :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

4.
   a. Il est clair qu'il faut utiliser le théorème de la bijection.
   La fonction $x \to x\,\mathrm{e}^x$ est continue car produit de fonctions continues ; la fonction g est donc continue car somme de fonctions continues.
   On a $g(0) = 2$. D'autre part, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors g n'est pas minorée, donc il existe un nombre $t \in [0 ; +\infty[$ tel que, par exemple, $g(t) = -1$.
   Alors $0 \in]g(t) ; g(0)[$.
   D'autre part, g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, d'après le tableau précédent.
   D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a alors une solution unique sur $]0 ; t[$.
   D'autre part, comme g est décroissante, alors pour tout $x \geq t$, $f(x) \leq -1$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $[t ; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0 ; +\infty[$.

b. On utilise la calculatrice : un tableau de valeurs ou la fonction « solve » lorsqu'elle est présente. On trouve : $\alpha \in [1{,}27 ; 1{,}28]$.

c. On a $g(\alpha)=\mathrm{e}^{\alpha}-\alpha\mathrm{e}^{\alpha}+1=0$ donc $\mathrm{e}^{\alpha}(1-\alpha)=-1$ donc $\mathrm{e}^{\alpha}=\frac{-1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$.

5. Facile, à partir du tableau de variations.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	2	$+$	0	$-$	$-\infty$

Partie B

1. $\mathrm{A}'(x)=\frac{4\times(\mathrm{e}^{x}+1)-4x\times\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{4(\mathrm{e}^{x}-x\,\mathrm{e}^{x}+1)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}=\frac{4\,g(x)}{(\mathrm{e}^{x}+1)^2}$. Le dénominateur est positif, donc $\mathrm{A}'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

2. Le signe de g et donc de A' est donné dans le tableau précédent. Donc :

x	0		α		$+\infty$
$\mathrm{A}'(x)$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{A}(x)$	0	$\nearrow$	$4(\alpha-1)$	$\searrow$	

3. On met en facteur les termes prépondérant. $\mathrm{A}(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\times\frac{4}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{1+\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}}=4$.

D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}=+\infty$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{x}}=0$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{A}(x)=0\times4=0$.

Par conséquent, la courbe représentative de A admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Exercice 2 :

Partie A

1. Déterminons la dérivée de g : $g'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on obtient le tableau :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le tableau précédent, g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$. Donc, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $g(x)\geqslant 0$.

3. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $\mathrm{e}^{x}-x-1\geqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{x}-x>0$.

Partie B

1. On admet que f est strictement croissante sur [0 ; 1].
   Par conséquent, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [f(0) ; f(1)]$.
   Or, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
   Ainsi, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$.

2.

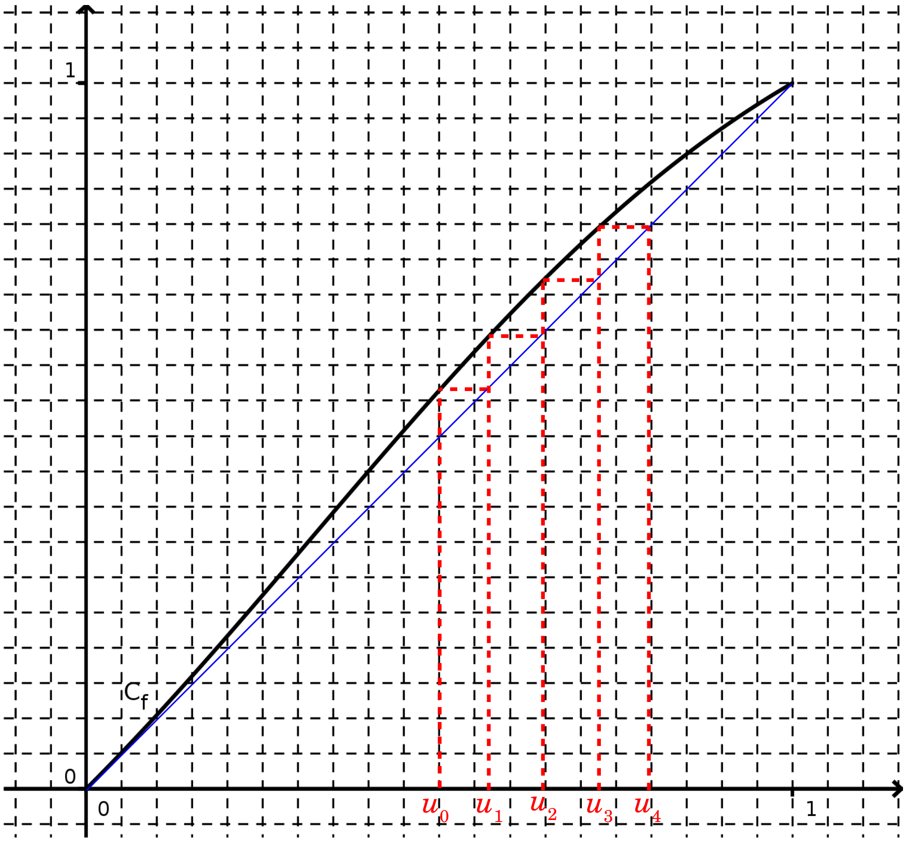
   a. On a : $f(x)-x=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}-x=\dfrac{e^x-1-x e^x+x^2}{e^x-x}$; d'autre part,
   $\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}=\dfrac{(1-x)(e^x-x-1)}{e^x-x}=\dfrac{e^x-x-1-x e^x+x^2+x}{e^x-x}=\dfrac{e^x-1-x e^x+x^2}{e^x-x}$.
   C'est bien la même expression. L'égalité est démontrée.

   b. Cherchons le signe de $f(x) - x$ en fonction de x.
   Pour $x \in [0 ; 1]$, on a : $e^x-x>0$ d'après la question A.3.
   On a aussi $1-x\geq 0$.
   Enfin, $g(x)\geq 0$ d'après la question A.2.
   Donc $f(x)-x=\dfrac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$ est positif comme produit de nombres positifs.

   Donc, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \geq x$.
   Par conséquent, la droite (D) est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}$ sur [0 ; 1].

Partie C

1. On trace (en bleu) la droite d'équation $y = x$.



2. Montrons tout d'abord par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0;1]$.
   Posons : P(n) : $u_n\in[0;1]$.
   P(0) est vraie puisque $u_0=\dfrac{1}{2}$.
   Supposons P(n) vraie.
   Alors $u_{n+1}=f(u_n)\in[0;1]$ d'après la question B.1.

P(0) est vraie et P(n) implique P(n+1). Donc P(n) est vraie pour tout n.

D'après la question 2.a, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \geq x$.
Comme pour tout n, $u_n \in [0 ; 1]$, alors $f(u_n) \geq u_n$, soit $u_{n+1} \geq u_n$.
Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

Comme (u_n) est croissante, elle est minorée par son premier terme.
On obtient donc en rassemblant ces informations : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) d'après la question précédente.
   Par conséquent, d'après le théorème du cours sur les suites, elle est convergente.
   Soit l sa limite.
   La fonction f est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Par conséquent : $\lim_{x \to l} f(x) = f(l)$. On a donc par composition de limites :
   $$\left.\begin{array}{r} \lim_{n \to +\infty} u_n = l \\ \lim_{x \to l} f(x) = f(l) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$$
   Or, $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(l)$.
   Comme on a bien sûr : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$, cela entraîne : $l = f(l)$, ce qui s'écrit aussi : $f(l) - l = 0$.

   D'après la question 2.a, $f(l) - l = \frac{(1-l)g(l)}{e^l - l}$.
   L'équation $f(l) - l = 0$ est donc équivalente à $\frac{(1-l)g(l)}{e^l - l} = 0$ soit $(1-l)g(l) = 0$.

   C'est un produit nul, donc cette équation équivaut à $(1 - l) = 0$ ou $g(l) = 0$.
   - $1 - l = 0$ ssi $l = 1$.
   - $g(l) = 0$ ssi $l = 0$, d'après la question A.1.

   Mais la solution $l = 0$ est impossible car pour tout n, $u_n \geq \frac{1}{2}$.
   Il reste donc une solution : $l = 1$.
   La limite de la suite (u_n) est 1.

Voilà.