La méthode d'Euler

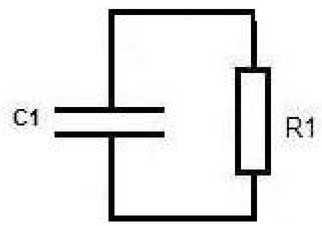
Il s'agit d'une méthode générale pour construire une solution approchée d'une équation différentielle. Mais qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

I] Équation différentielle

1) Le problème

D'une façon vague, le problème s'énonce ainsi : peut-on définir une fonction lorsqu'on connaît seulement une relation entre cette fonction et sa dérivée ? Et d'abord, une telle fonction existe-telle ? Et est-elle unique ?

2) Exemple issu de la physique : décharge d'un condensateur



À t = 0, le condensateur se décharge dans la résistance.

Donc, si on appelle v la tension aux bornes de R et i l'intensité électrique, on a :

$v=\mathrm{R}i$ et $i=-\mathrm{C}\dfrac{dv}{dt}$.

Par conséquent : $v=-\mathrm{RC}\dfrac{dv}{dt}$

On obtient bien une relation entre la tension v et sa dérivée par rapport au temps.

3) Essayons de préciser

Dans les cas simples, une équation différentielle se présente ainsi : $y'=\varphi(t,y)$ où φ est une fonction continue.

Résoudre l'équation, c'est trouver une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$, on ait : $f'(t)=\varphi(t;f(t))$.

Cette définition pose quelques difficultés : d'abord, φ est une fonction de deux variables ; ensuite, il faut faire attention aux ensembles de définition de f et φ. Dans la suite, on emploiera la méthode d'Euler dans des cas simples, pour lesquels ces difficultés ne se présentent pas.

Retenons simplement que si l'on connaît t et $f(t)$, on peut calculer $f'(t)$.

Par ailleurs, il faut définir les conditions initiales :

t_0 et y_0 étant deux nombres fixés, on veut avoir $f(t_0)=y_0$. Intuitivement, t représente le temps et f une grandeur dépendant de t ; on voit alors que la grandeur f prend la valeur y_0 lorsque $t = t_0$.

II] Méthode d'Euler : généralités

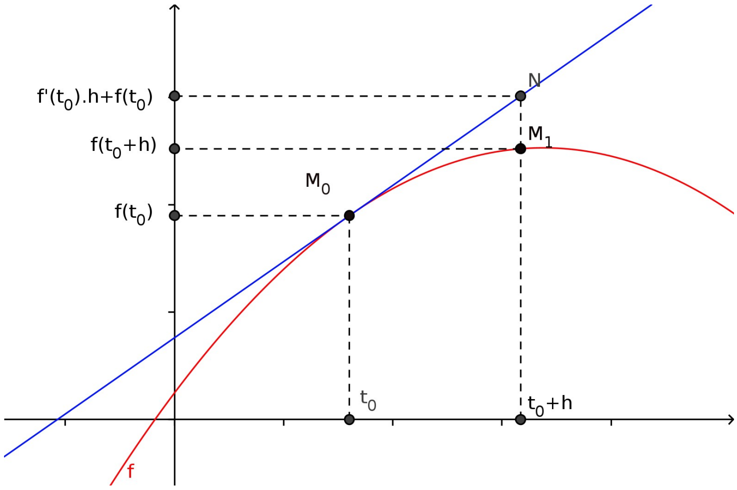
Elle consiste à trouver une fonction qui est une solution approchée de l'équation différentielle $y'=\varphi(t,y)$.

1) Rappels de première

Soit f, une fonction, dérivable sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et C_f la courbe représentant f. La tangente à C_f au point M_0 (t_0 ; $f(t_0)$) a pour équation : $y=f'(t_0)(t-t_0)+f(t_0)$

On a vu en première, que si on ne s'écarte « pas trop » du point M_0, la tangente en M_0 reste « proche » de la courbe C_f. Autrement dit, si t est assez proche de t_0, le point N $\left(t\,;f'\left(t_0\right)\cdot\left(t-t_0\right)+f\left(t_0\right)\right)$, qui est situé sur la tangente, est proche du point M_1 $(t\,;f(t))$, qui est situé sur la courbe.

C'est ce que montre l'illustration ci-contre.



On exprime ceci en disant que, si t est assez proche de t_0, $f'\left(t-t_0\right).\left(t-t_0\right)+y\left(t_0\right)$ est une bonne approximation de $f(t)$.

On peut donc écrire, en posant $h=t-t_0$:

Si $\boldsymbol{h}$ est assez voisin de 0, $\boldsymbol{f\left(t_0+h\right)\approx f'\left(t_0\right)h+f\left(t_0\right)}$.

L'idée de base de la méthode d'Euler consiste à appliquer plusieurs fois cette approximation en progressant à chaque fois d'un pas h sur l'axe des abscisses.

2) La méthode

Soit f la fonction qu'on cherche à approcher.

On va construire une suite de points M_k de coordonnées $(t_k\,;y_k)$, les t_k étant régulièrement espacés : on ajoute toujours le même nombre h pour passer de t_k à t_{k+1} ; h est appelé le pas de la subdivision.

On fixe donc t_0, y_0 et h, et on lance l'algorithme. À chaque étape, on obtiendra alors deux nombres t_k et y_k tels que :

$\begin{cases} t_{k+1}=t_k+h \\ y_{k+1}=a_k h+y_k \end{cases}$ où a_k est une valeur approchée de $f'(t_k)$. On obtient a_k à partir de l'équation différentielle.

Intuitivement, on peut penser que plus le pas h de la subdivision devient petit, plus l'approximation est précise et fiable. Les points M_k deviennent alors très proches les uns des autres.

Si tout se passe bien, on peut « passer à la limite » : lorsque h tend vers 0, les points M_k forment une courbe continue, qui est la représentation graphique de la fonction f solution..

Remarque importante.

La méthode d'Euler peut en fait servir à deux choses :

- D'un point de vue pratique, approcher (numériquement ou graphiquement) la fonction solution d'une équation différentielle, lorsqu'on sait que cette fonction existe.
- D'un point de vue théorique : prouver qu'une équation différentielle donnée admet bien une solution. C'est là que le passage à la limite devient le maillon essentiel.

Voyons tout ceci sur quelques exemples.

III] Premier exemple : *y*' = 2*t*.

Soit à approcher par la méthode d'Euler une solution de l'équation $y' = 2t$ avec $y = 0$ pour $t = 0$.

On cherche donc à approcher une fonction f telle que $f'(t) = 2t$ et $f(0) = 0$, f étant définie sur un intervalle contenant 0.

On remarque que $f'(t)$ dépend de t, mais pas de $f(t)$.

Compte tenu de la relation $y' = 2t$, on aura donc : $a_k = f'(t_k) = 2t_k$.

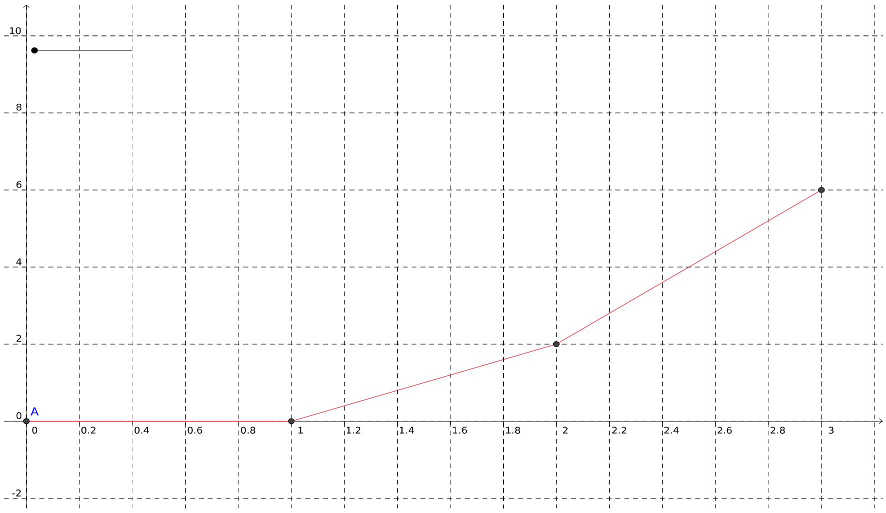
Cela donne : $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = 2t_k h + y_k \end{cases}$ avec $\begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$.

Premier tracé : pas *h* = 1

Le graphique ci-dessous montre les points obtenus avec un pas ***h* = 1** sur l'intervalle [0 ; 3].

On a ici : $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + 1 \\ y_{k+1} = 2t_k \times 1 + y_k \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + 1 \\ y_{k+1} = 2t_k + y_k \end{cases}$

Étape 1 :	**Étape 2 :**	**Étape 3 :**
$\begin{cases} t_1 = 0+1 \\ y_1 = 2\times 0 + 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} t_2 = 1+1 \\ y_2 = 2\times 1 + 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_2 = 2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} t_3 = 2+1 \\ y_3 = 2\times 2 + 2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_3 = 3 \\ y_3 = 6 \end{cases}$

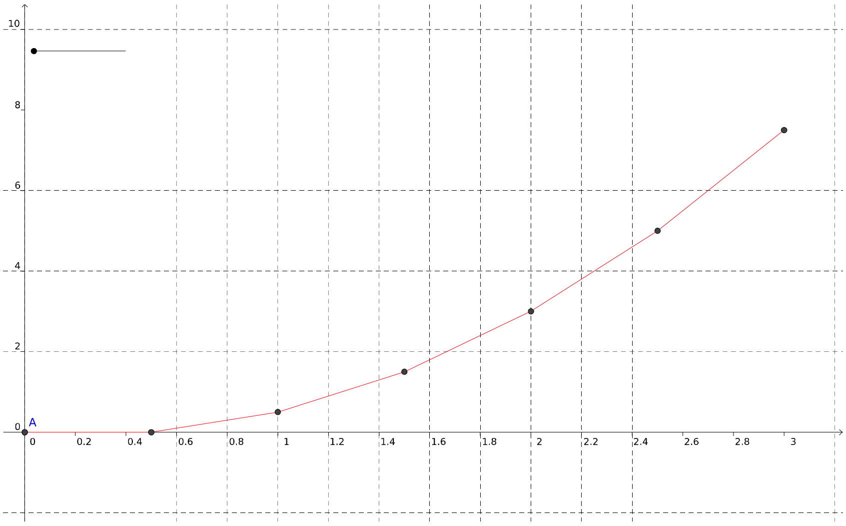


Deuxième tracé : pas *h* = 0,5

Le graphique ci-dessous montre à présent les points obtenus avec un pas ***h* = 0,5** sur l'intervalle [0 ; 3].

On a ici : $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + 0{,}5 \\ y_{k+1} = 2t_k \times 0{,}5 + y_k \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + 0{,}5 \\ y_{k+1} = t_k + y_k \end{cases}$

Étape 1 :	**Étape 2 :**	**Étape 3 :**
$\begin{cases} t_1 = 0+0{,}5 \\ y_1 = 0+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_1 = 0{,}5 \\ y_1 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} t_2 = 0{,}5+0{,}5 \\ y_2 = 0{,}5+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_2 = 1 \\ y_2 = 0{,}5 \end{cases}$	$\begin{cases} t_3 = 1+0{,}5 \\ y_3 = 1+0{,}5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_3 = 1{,}5 \\ y_3 = 1{,}5 \end{cases}$
Étape 4 :	**Étape 5 :**	**Étape 6 :**
$\begin{cases} t_4 = 1{,}5+0{,}5 \\ y_4 = 1{,}5+1{,}5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_4 = 2 \\ y_4 = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} t_5 = 2+0{,}5 \\ y_5 = 3+2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_5 = 2{,}5 \\ y_5 = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} t_6 = 2{,}5+0{,}5 \\ y_6 = 2{,}5+5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_6 = 3 \\ y_6 = 7{,}5 \end{cases}$

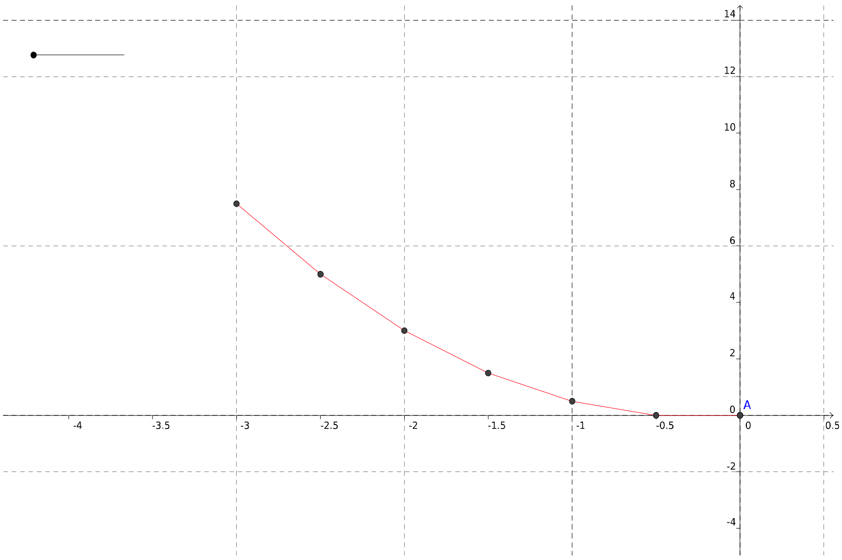


Troisième tracé : pas *h* = –0,5

Le graphique ci-dessous montre les points obtenus avec un pas ***h* = –0,5** sur l'intervalle [-3 ; 0].

On a ici : $\begin{cases} t_{k+1}=t_k-0{,}5 \\ y_{k+1}=2t_k\times(-0{,}5)+y_k \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_{k+1}=t_k-0{,}5 \\ y_{k+1}=-t_k+y_k \end{cases}$

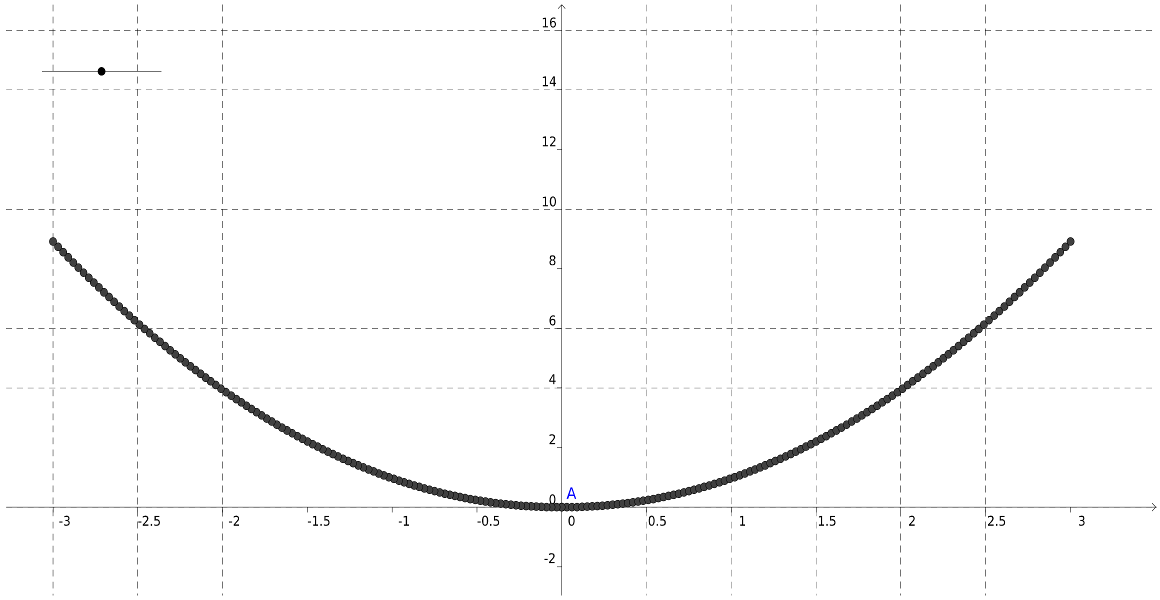
Étape 1 : $\begin{cases} t_1=0-0{,}5 \\ y_1=-0+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_1=-0{,}5 \\ y_1=0 \end{cases}$	**Étape 2 :** $\begin{cases} t_2=-0{,}5-0{,}5 \\ y_2=0{,}5+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_2=-1 \\ y_2=0{,}5 \end{cases}$	**Étape 3 :** $\begin{cases} t_3=-1-0{,}5 \\ y_3=-1-0{,}5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_3=-1{,}5 \\ y_3=-1{,}5 \end{cases}$
Étape 4 : $\begin{cases} t_4=-1{,}5-0{,}5 \\ y_4=-1{,}5-1{,}5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_4=-2 \\ y_4=-3 \end{cases}$	**Étape 5 :** $\begin{cases} t_5=-2-0{,}5 \\ y_5=-3-2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_5=-2{,}5 \\ y_5=-5 \end{cases}$	**Étape 6 :** $\begin{cases} t_6=-2{,}5-0{,}5 \\ y_6=-2{,}5-5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} t_6=-3 \\ y_6=-7{,}5 \end{cases}$



On peut remarquer que l'algorithme produit des points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Si on prend un pas très petit, les points « se serrent » et on voit apparaître une courbe.

Exemple pour h=0,03 (à droite de A) et –0,03 (à gauche de A) :



Remarque 1 :

La courbe obtenue ressemble comme deux gouttes d'eau à celle de la fonction « carré ». C'est normal.

En effet, soit f la fonction « carré ».

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = 2t$ et d'autre part : $f(0) = 0$. Donc f est une solution de notre équation différentielle. On peut démontrer que c'est la seule.

Remarque 2 :

On peut aussi démontrer que les points générés par la méthode d'Euler se rapprochent infiniment de la courbe d'équation $y = t^2$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

En effet, on a : $\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = 2t_k h + y_k \end{cases}$ avec $\begin{cases} t_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$.

Soit un nombre $a > 0$ (par exemple) ; pour simplifier, partageons l'intervalle $[0 ; a]$ en n parties égales.

On pose donc : $h = \dfrac{a}{n}$. Alors $t_k = k\dfrac{a}{n}$ et $t_n = n\dfrac{a}{n} = a$. Calculons y_n.

On a : $y_{k+1} = 2t_k h + y_k = 2k\dfrac{a}{n}\cdot\dfrac{a}{n} + y_k = 2k\left(\dfrac{a}{n}\right)^2 + y_k$.

Donc : $y_n = 0 + 2\times 1\left(\dfrac{a}{n}\right)^2 + 2\times 2\left(\dfrac{a}{n}\right)^2 + 2\times 3\left(\dfrac{a}{n}\right)^2 + \ldots + 2\times(n-1)\left(\dfrac{a}{n}\right)^2 = 2\left(\dfrac{a}{n}\right)^2\left(1+2+3+\ldots+(n-1)\right)$.

On sait que $1+2+\ldots+(n-1) = \dfrac{(n-1)\cdot n}{2}$. Donc $y_n = 2\left(\dfrac{a}{n}\right)^2\cdot\dfrac{(n-1)n}{2} = a^2\cdot\dfrac{n-1}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-1}{n} = 1$, on a bien : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a^2$.

Le point M_n $(t_n ; y_n)$ se rapproche infiniment du point de coordonnées $(a ; a^2)$.

IV] Deuxième exemple : $y'=2\sqrt{y}$

Pour changer un peu, on note x la variable. Cela n'a bien sûr aucune importance.

Soit à approcher par la méthode d'Euler une solution de l'équation $y'=2\sqrt{y}$ avec $y = 0$ pour $x = 0$.

On cherche donc à approcher une fonction f telle que $f'(x) = 2\sqrt{f(x)}$ et $f(0) = 0$, f étant définie sur un intervalle contenant 0.

Remarques :

- Ici $f'(x)$ dépend de $f(x)$, mais pas directement de x.
- Il est facile de voir que la restriction de la fonction carré à $[0 ; +\infty[$ est solution.

En effet, si on définit la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2$, alors on a : $2\sqrt{f(x)}=2x$, donc on a bien $f'(x)=2\sqrt{f(x)}$. D'autre part, on a bien $f(0)=0$.

On construit donc une suite de points $M(x_k ; y_k)$ tels que : $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+h \\ y_{k+1}=2\sqrt{y_k}\cdot h+y_k \end{cases}$ avec $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases}$.

On prend pour le calcul ci-dessous un pas **h = 1 sur l'intervalle [0 ; 3]**.

On a : $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+1 \\ y_{k+1}=2\sqrt{y_k}\times 1+y_k \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+1 \\ y_{k+1}=2\sqrt{y_k}+y_k \end{cases}$

Étape 1 :	**Étape 2 :**	**Étape 3 :**
$\begin{cases} x_1=0+1 \\ y_1=2\times 0+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2=1+1 \\ y_2=2\times 0+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x_3=2+1 \\ y_3=2\times 0+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_3=3 \\ y_3=0 \end{cases}$

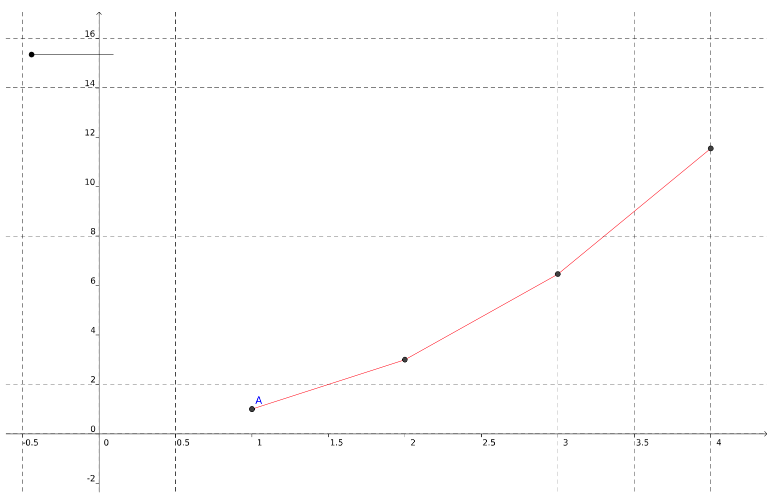
On obtient $y_k = 0$ quel que soit k. C'est bizarre : on ne retrouve pas la fonction « carré ».

En fait, on peut vérifier facilement que la fonction constante $x \to 0$ est bien solution de l'équation différentielle. Donc cette équation différentielle a au moins deux solutions sur $[0 ; +\infty[$. Ça arrive...

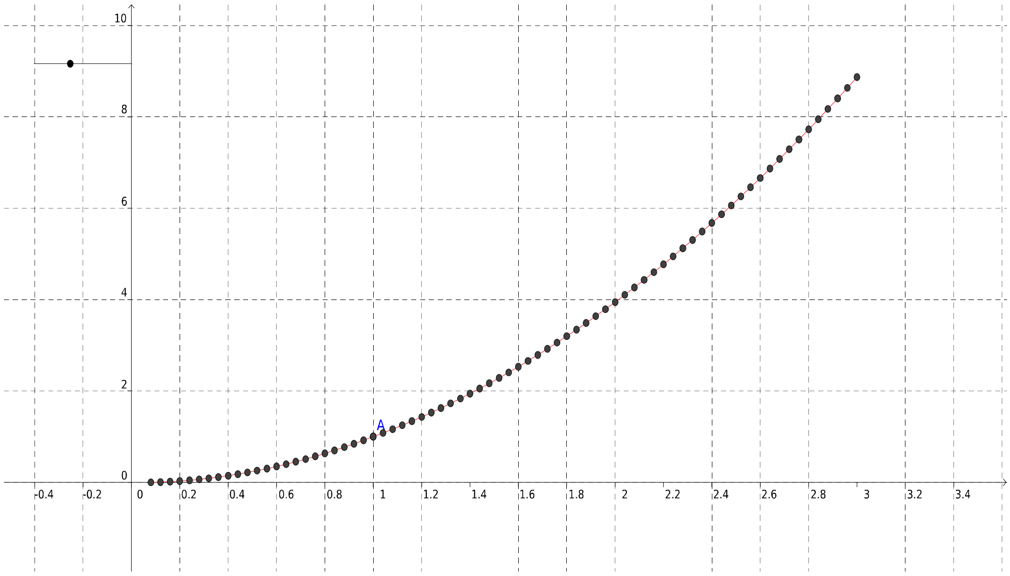
Pour retrouver la fonction « carré », il faut donner d'autres valeurs initiales. Prenons $x_0= 1$ et $y_0 =1$.

On obtient les résultats et le graphique suivants pour ***h* = 1 sur [1 ; 4]** :

Étape 1 :	**Étape 2 :**	**Étape 3 :**
$\begin{cases} x_1=1+1 \\ y_1=2\times 1+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2=2+1 \\ y_2=2\sqrt{3}+3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_2=3 \\ y_2\approx 6{,}4641 \end{cases}$	$\begin{cases} x_3=3+1 \\ y_3=2\sqrt{6{,}4641}+6{,}4641 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_3=4 \\ y_3\approx 11{,}5490 \end{cases}$



Avec un pas de $\boldsymbol{h}$**=0,03** pour $x>1$(à droite de A) et $\boldsymbol{h}$**=–0,03** pour $x<1$ (à gauche de A) :



On obtient une courbe très proche de la représentation graphique de la fonction carrée sur [0 ; 3]. C'est bien ce à quoi on s'attendait.

V] Troisième exemple : *y*'=*y*

Cet exemple, absolument fondamental, sera traité dans le chapitre consacré à la fonction exponentielle.

VI] Quatrième exemple : *y*' = 1/*x*

Soit à approcher par la méthode d'Euler une solution de l'équation $y'=\frac{1}{x}$ avec $y = 0$ pour $x = 1$.

On cherche donc à approcher une fonction f telle que $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $f(1) = 0$, f étant définie sur un intervalle contenant 0.

On remarque,comme dans l'exemple 1, que $f'(x)$ dépend de x, mais pas de $f(x)$.

On a $y'=\frac{1}{x}$. On peut prendre : $a_k=f'(x_k)=\frac{1}{x_k}$ ou $a_k=f'(x_{k+1})=\frac{1}{x_{k+1}}$.

Comme la fonction inverse est décroissante sur]0 ; + ∞ [, pour $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, on a : $\frac{1}{x_{k+1}} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x_k}$.

Donc $f'(x_{k+1}) \leq f'(x) \leq f'(x_k)$.

On peut en déduire (on l'admet pour l'instant) que $f'(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k) \leq f(x_{k+1})-f(x_k) \leq f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$.

Le choix $a_k=f'(x_k)=\frac{1}{x_k}$ donne une approximation par excès de f, et le choix $a_k=f'(x_{k+1})=\frac{1}{x_{k+1}}$ une approximation par défaut. Choisissons $a_k=\frac{1}{x_k}$.

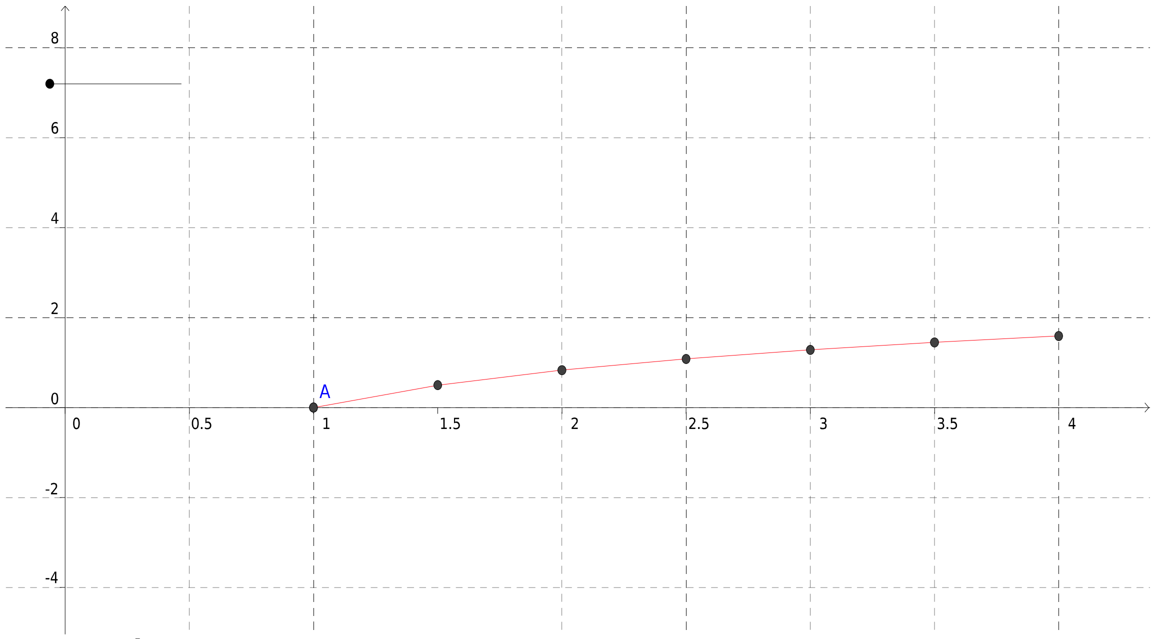
Cela donne : $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+h \\ y_{k+1}=\frac{1}{x_k}h+y_k \end{cases}$ avec $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$.

Premier tracé : pas *h* = 0,5

Le graphique ci-dessous montre les points obtenus avec un pas ***h* = 0,5** sur l'intervalle [1 ; 4].

On a ici : $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+0{,}5 \\ y_{k+1}=\dfrac{1}{x_k}\times 0{,}5+y_k \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+0{,}5 \\ y_{k+1}=\dfrac{0{,}5}{x_k}+y_k \end{cases}$ avec $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=0 \end{cases}$

Étape 1 : $\begin{cases} x_1=1+0{,}5 \\ y_1=\dfrac{0{,}5}{1}+0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_1=1{,}5 \\ y_1=0{,}5 \end{cases}$	**Étape 2 :** $\begin{cases} t_2=1{,}5+0{,}5 \\ y_2=\dfrac{0{,}5}{1{,}5}+0{,}5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2\approx 0{,}83 \end{cases}$	**Étape 3 :** $\begin{cases} x_3=2+0{,}5 \\ y_3\approx\dfrac{0{,}5}{2}+0{,}83 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_3=2{,}5 \\ y_3\approx 1{,}08 \end{cases}$
Étape 4 : $\begin{cases} x_4=2{,}5+0{,}5 \\ y_4\approx\dfrac{0{,}5}{2{,}5}+1{,}08 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_4=3 \\ y_4\approx 1{,}28 \end{cases}$	**Étape 5 :** $\begin{cases} x_5=3+0{,}5 \\ y_5\approx\dfrac{0{,}5}{3}+1{,}28 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_5=3{,}5 \\ y_5=1{,}45 \end{cases}$	**Étape 6 :** $\begin{cases} x_6=4 \\ y_6\approx\dfrac{0{,}5}{3{,}5}+1{,}45 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_6=4 \\ y_6\approx 1{,}59 \end{cases}$



Deuxième tracé : pas = 0,05

Le graphique ci-dessous montre les points obtenus avec un pas ***h* = 0,05** *s*ur l'intervalle [1 ; 4] et ***h* = –0,05** sur l'intervalle]0 ; 1].