Correction de l'exercice nº80 page 103

Partie A :

1. La courbe d'une fonction admet une asymptote horizontale si la limite de la fonction en +∞ ou −∞ est finie. Ici, f est définie sur]0 ; +∞[, donc il s'agit de la limite en +∞.
   $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}-\mathrm{e}^{-x}=1$.
   Par conséquent, $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y=1}$.

2. $f'(x)=\frac{1\times(x+1)-(x-1)\times1}{(x+1)^2}-(-1)\times\mathrm{e}^{-x}=\frac{2}{(x+1)^2}+\mathrm{e}^{-x}$.
   Les deux termes sont strictement positifs, donc pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$.

x	0	+∞
$f(x)$	−2 ↗	1

3. Rappel : l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f au point d'abscisse a est :
   $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
   Ici : $f'(0)=\frac{2}{(0+1)^2}+\mathrm{e}^0=2+1=3$ et $f(0)=\frac{0-1}{0+1}-\mathrm{e}^0=-1-1=-2$.
   Donc T a pour équation : $y=3(x-0)-2$ soit $\boxed{y=3x-2}$.

4. D'abord, 0 appartient à l'intervalle]f(1) ; f(2)[. En effet, $f(1)=0-\mathrm{e}^{-1}<0$ et $f(2)=\frac{1}{3}-\mathrm{e}^{-2}>0$.
   D'autre part, f est continue et strictement croissante sur [1 ; 2], d'après le tableau de variations. D'après le théorème de la bijection, on peut en conclure que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur [1 ; 2].

   Pour trouver un encadrement de u, on programme la fonction f à la calculatrice et on utilise un tableau de valeur, ou bien encore l'outil « trace » du graphique.

   On peut aussi programmer un algorithme de résolution, utilisant par exemple la méthode par dichotomie ou la méthode de Newton, comme nous l'avons vu dans l'exemple de racine carrée de 2.

   On trouve : $\boxed{1,5<u<1,6}$.

Partie B :

1. $f_n'(x)=\frac{1\times(x+n)-(x-n)\times1}{(x+n)^2}-(-1)\times\mathrm{e}^{-x}=\frac{2n}{(x+n)^2}+\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme n est un entier naturel, le quotient précédent est positif ; on ajoute $\exp(-x)$ qui est lui aussi strictement positif. Ainsi : $f_n'(x)>0$ donc f_n est strictement croissante.

   Le tableau est semblable à celui de f :

x	0	+∞
$f_n(x)$	−2 ↗	1

2.
   a) $f_n(n)=\frac{n-n}{n+n}-\mathrm{e}^{-n}=0-\mathrm{e}^{-n}=-\frac{1}{\mathrm{e}^n}<0$ (exp(x) est positif pour tout x).

b) Posons : $P(n)$: $e^{n+1}>2n+1$.

Initialisation :

$P(0)$ est vraie car $e>1$. En effet, on sait que e est compris entre 2 et 3.

$P(1)$ est vraie car $e^2>3$. En effet, $e^2>2^2=4$.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n\geqslant 1$.

On veut démontrer $P(n+1)$: $e^{n+2}>2(n+1)+1$.

On a : $e^{n+1}>2n+1$.

On en déduit : $e^{n+2}=e\times e^{n+1}>e\times(2n+1)$ (car e>0).

Comme $e>2$ et $2n+1>0$, ceci implique : $e^{n+2}>2\times(2n+1)$.

Ainsi : $e^{n+2}>4n+2=2n+2n+2$.

Or, comme $n\geqslant 1$, on a $2n\geqslant 2$ donc $2n+2\geqslant 4$.

Par conséquent : $e^{n+2}>4n+2\geq 2n+4>2n+3=2(n+1)+1$.

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$P(1)$ est vraie et pour tout $n\geqslant 1$, P(n) implique P(n+1).

Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

Comme elle est aussi vraie pour n=0, elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) On a : $f_n(n)=-e^{-n}<0$ et $f_n(n+1)=\dfrac{n+1-n}{n+1+n}-e^{-(n+1)}=\dfrac{1}{2n+1}-e^{-(n+1)}=\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{e^{(n+1)}}$.

On sait d'après la question b) que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $e^{n+1}>2n+1$.

Ces deux nombres sont strictement positifs ; on sait que la fonction inverse est strictement décroissante sur]0 ; +∞[, donc leurs inverses sont rangés dans l'ordre contraire :

$\dfrac{1}{e^{n+1}}<\dfrac{1}{2n+1}$; donc $\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{e^{n+1}}>0$.

Par conséquent, $f_n(n+1)>0$.

On a donc : $f_n(n)<0<f_n(n+1)$.

La fonction f_n est continue et strictement croissante d'après le tableau de variations (qu. B-1).

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x)=0$ a une solution unique sur [n ; n+1].

3. D'après la question précédente, on a pour tout n : $u_n\geqslant n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, d'après le théorème de comparaison (1 seul gendarme), on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty}$.

On peut dire aussi que (u_n) est croissante, car $u_n\leqslant n+1\leqslant u_{n+1}$, et (u_n) n'est pas majorée, car l'ensemble des entiers naturels ne l'est pas.

Ainsi, (u_n) est croissante, et non majorée, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

On a d'après la question précédente : $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.

Comme $n>0$, on en déduit : $\dfrac{n}{n}\leqslant\dfrac{u_n}{n}\leqslant\dfrac{n+1}{n}$ soit $1\leqslant v_n\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$.

On peut alors appliquer le théorème des gendarmes :

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1\leqslant v_n\leqslant 1+\dfrac{1}{n}$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1=1$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n}=1$

donc la suite (v_n) converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1}$.