Correction du devoir surveillé nº2

Exercice 1 :

1) Comme dans le cours. On suppose qu'on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$.
Soit *f* une autre solution de l'équation différentielle donnée.
Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{f(x)}{\exp(x)}$; *g* est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur ne s'annule pas.
On a : $g'(x) = \dfrac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{(f(x))^2}$.
Comme $f' = f$ et $\exp' = \exp$, on obtient : $g'(x) = \dfrac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{(f(x))^2} = 0$.
Comme la dérivée de *g* est la fonction nulle, alors *g* est une fonction constante. On évalue cette constante en calculant $g(0)$: $g(0) = \dfrac{f(0)}{\exp(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)}{\exp(x)} = 1$ donc $f(x) = \exp(x)$. Les fonctions *f* et exp sont égales.

2) *a*) Calcul simple :
$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = \exp(a+x)$ et $v(x) = \exp(b-x)$.
Alors $f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
$u'(x) = 1 \times \exp'(a+x) = \exp(a+x)$ et $v'(x) = -1 \times \exp'(b-x) = -\exp(b-x)$.
Donc : $f'(x) = \exp(a+x)\exp(b-x) - \exp(a+x)\exp(b-x) = 0$.

La dérivée de *f* est la fonction nulle donc *f* est constante.

b) $f(0) = \exp(0+a)\exp(b-0) = \exp(a)\exp(b)$;
$f(b) = \exp(a+b)\exp(b-b) = \exp(a+b)\exp(0) = \exp(a+b)$.
Comme *f* est constante, $f(0) = f(b)$, donc : $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

Exercice 2 :

1) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2x}-5}{e^x-3} = \dfrac{-5}{-3} = \dfrac{5}{3}$.
On a : $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{2x}-5}{e^x-3} = \dfrac{1-5}{1-3} = \dfrac{-4}{-2} = 2$.
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 5\right)$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 5\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5x = +\infty$.

2) $f'(x) = \dfrac{e^x \times (x+1) - e^x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x \cdot e^x}{(x+1)^2}$.
$g'(x) = 3e^{3x+2}$ d'après la propriété du cours : si $f(x) = u(ax+b)$ alors $f'(x) = a \cdot u'(ax+b)$.

Exercice 3 :

1) $\varphi_1'(x) = -e^{-x}$ donc φ_1' est négative sur [0 ; 2π]. Donc :

x	0		2π
$\varphi_1'(x)$		$-$	
$\varphi_1(x)$	1	↘	$e^{-2\pi}$

2) On cherche les points de (C) dont l'ordonnée vaut 0 ; on résout : $f(x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)=0$.
Sur $[0 ; 2\pi]$, les solutions sont : $\{0 ; \pi; 2\pi\}$. Les coordonnées s'en déduisent : $(0 ; 0)$; $(\pi ; 0)$; $(2\pi ; 0)$.
Le signe de $f(x)$ est le même que le signe de $\sin(x)$:

x	0		π		2π
$f(x)$	0	$+$	0	$-$	0

3) D'après la règle de dérivation d'un produit : $f'(x)=-e^{-x}\sin(x)+e^{-x}\cos(x)=e^{-x}(\cos(x)-\sin(x))$.
Or : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos(x)\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin(x)\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(x)-\sin(x))$.
Donc : $(\cos(x)-\sin(x))=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ d'où le résultat.

4) Les nombres e^{-x} et $\sqrt{2}$ sont positifs, donc le signe de f' est le même que celui de $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.
On a : $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$ lorsque $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ soit $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ (faire un dessin.)
Comme f est définie sur $[0 ; 2\pi]$, les solutions de $f'(x)=0$ sont ici : $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.
On obtient le tableau suivant :

x	0		$\pi/4$		$5\pi/4$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{e^{\frac{-\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↘	$\frac{-e^{\frac{-5\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	↗	0

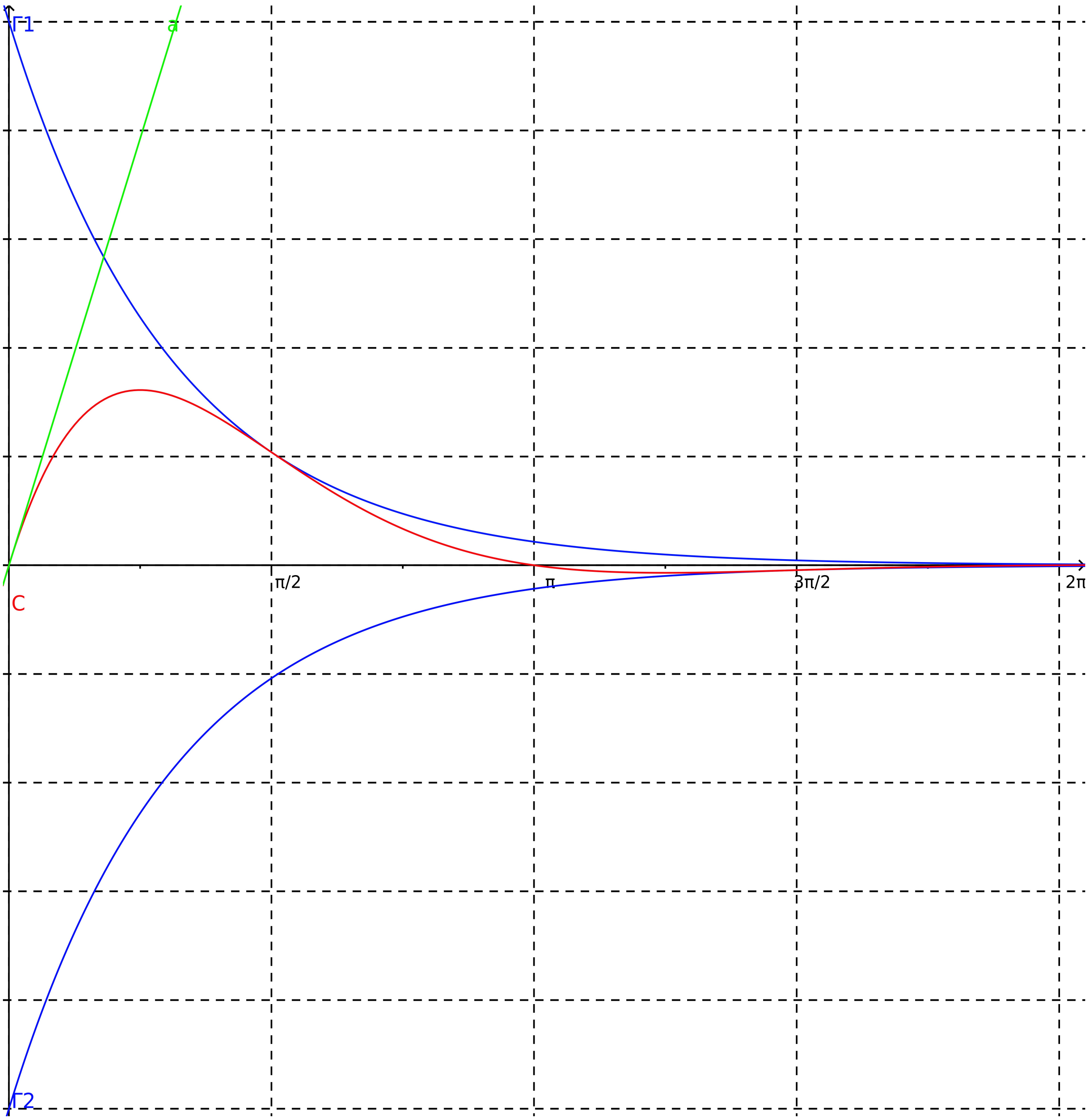
5) Il s'agit des points d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$.
On calcule : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{-\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{-\pi}{4}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{e^{\frac{-\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\simeq 0{,}322$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{\frac{-5\pi}{4}}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{\frac{-5\pi}{4}}\times\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-e^{\frac{-5\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\simeq -0{,}014 \cdot$$

Donc $A\left(\frac{\pi}{4};\frac{e^{\frac{-\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$ et $B\left(\frac{5\pi}{4};\frac{e^{\frac{-5\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)$.

6) E appartient à Γ_1 et (C) donc on résout : $\varphi_1(x) = f(x)$: $e^{-x}=e^{-x}\sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
Sur $[0 ; 2\pi]$, la seule solution est : $x=\frac{\pi}{2}$. E a donc pour coordonnées : $\left(\frac{\pi}{2};e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$.
Γ_1 et (C) passent toutes les deux par E ; pour montrer qu'elles admettent la même tangente au point E, il suffit donc de vérifier que ces deux tangentes ont le même coefficient directeur.
Il suffit donc de vérifier que les nombres dérivés sont égaux en $x=\frac{\pi}{2}$, soit : $\varphi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Allons-y : $\varphi_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}(0-1)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$. Ça marche.

7)



$f'(0)=0$ donc la tangente à (C) au point O a pour coefficient directeur 1.

Exercice 4 :

1) La fonction f se décompose en produit de $x \to x^n$ et $x \to e^{-x}$. On applique la règle de dérivation d'un produit :

$f'(x)=n\,x^{n-1}\cdot e^{-x}+x^n\cdot(-e^{-x})=n\,x^{n-1}-x^n\,e^{-x}=n\,x^{n-1}-x^{n-1}\cdot x\cdot e^{-x}=x^{n-1}e^{-x}(n-x)$.

2) Comme $x \in [0\,;+\infty[$, x^{n-1} est positif, de même que e^{-x} .

Donc f' est du signe de $(n-x)$. On obtient donc le tableau suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0

3) D'après le tableau, le maximum est : $n^n e^{-n} = \frac{n^n}{e^n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

On sait que $e \simeq$ 2,71828182. Donc $0 < e < 3 \Rightarrow \frac{1}{e} > \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{6}{e} > \frac{6}{3} = 2$.

Si $n \geq 6$, on a donc : $\frac{n}{e} \geq \frac{6}{e} > 2$.

5) Démontrons d'abord que si $0 \leq a \leq b$, alors $a^n \leq b^n$.
Première méthode : on étudie la fonction g définie sur [0 ; +∞[par : $g(x) = x^n$.
$g'(x) = x^{n-1}$ donc $g'(x) \geq 0$ pour tout x donc g est croissante sur [0 ; +∞[.
Par conséquent les images sont dans le même ordre que les antécédents.
Deuxième méthode : par récurrence sur n.
Supposons $0 \leq a \leq b$.
Posons : P(n) : $a^n \leq b^n$.
P(1) est vraie : $a^1 \leq b^1$.
Supposons P(n) vraie. On veut démontrer P(n+1), c'est à dire : $a^{n+1} \leq b^{n+1}$.
Comme $a \leq b$, alors en multipliant par a^n , qui est positif : $a^{n+1} \leq a^n b$.
Comme on a supposé $a^n \leq b^n$, alors en multipliant par b, qui est positif : $a^{n+1} \leq b^{n+1}$.
On a donc : $a^{n+1} \leq a^n b \leq b^{n+1}$ et donc : $a^{n+1} \leq b^{n+1}$.
P(1) est vraie et P(n) implique P(n+1). Donc P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette propriété est si connue qu'on peut la considérer comme du cours.

Revenons à notre problème.
On a $\frac{n}{e} \geq 2$ à partir de $n \geq 6$, donc, d'après la propriété précédente : $\left(\frac{n}{e}\right)^n \geq 2^n$.
Donc, pour tout $n \geq 6$, $u_n \geq v_n$.
Or, 2 > 1 donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^n = +\infty$.
D'après le théorème « des gendarmes » ou plutôt « du gendarme » :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \geq v_n \text{ pour } n \geq 6 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} u_n = +\infty \ .$$

Voilà.