MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº3

Exercice 1 (d'après sujet de bac) : 10 points.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}$.

On rappelle que la fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} g'(x)=g(x) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \\ g(0)=1 \end{cases}.$$

1. Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{h}-1}{h}=1$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
3. Déterminer la limite de la fonction f en +∞.
4. Calculer $f'(x)$, pour $x\in$]0 ; +∞[.
5. Soit N la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $N(x)=\mathrm{e}^{x}-x\,\mathrm{e}^{x}-1$.
   Calculer $N(x)$ et en déduire les variations de N sur]0 ; +∞[.
6. Calculer $N(0)$ et en déduire que N est négative sur]0 ; +∞[.
7. En déduire le tableau de variations de f.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout n entier supérieur ou égal à 1 par : $u_{n}=\dfrac{1}{n}\left[1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

1. Démontrer que $1+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\ldots+\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_{n}=(\mathrm{e}-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En déduire en utilisant la partie A que la suite (u_n) converge vers e − 1.

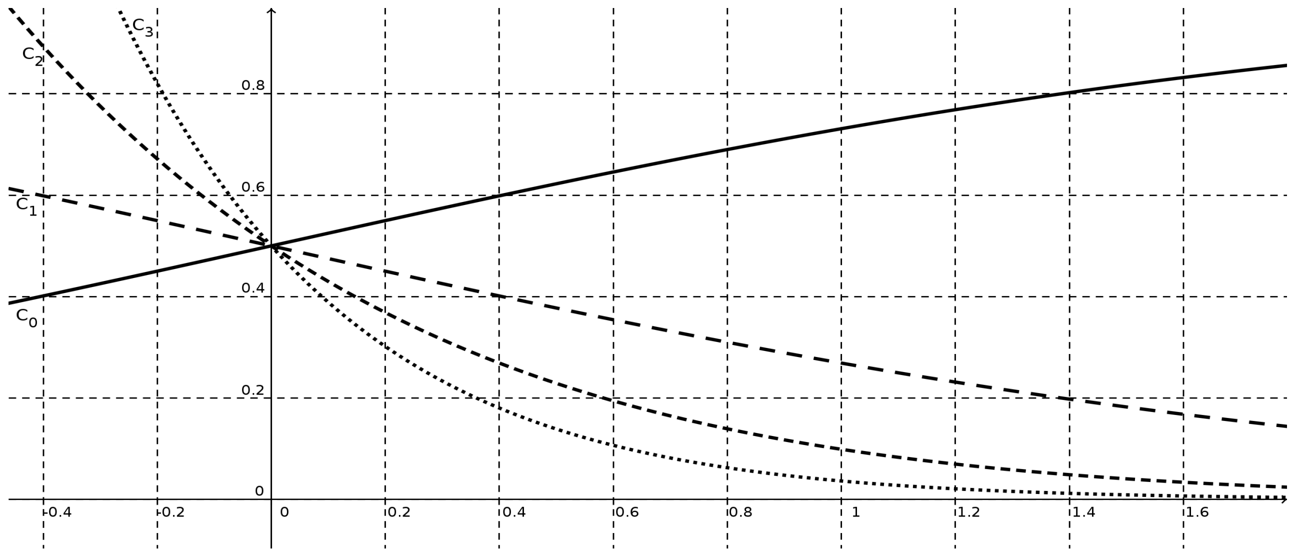
Exercice 2 (d'après sujet de bac) : 10 points.

Soit n un entier naturel.

On note f_n la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f_{n}(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

Les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont représentées ci-dessous :



1. Démontrer que pour tout entier naturel n, les courbes $\mathscr{C}_n$ ont un point A en commun. On précisera ses coordonnées.
2. Étude de la fonction f_0.
   a) Étudier le sens de variation de f_0.
   b) Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.
   d) Démontrer que l'équation $f_0(x)=0{,}8$ a une solution unique α sur $\mathbb{R}$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α.
3. Étude de la fonction f_n pour $n \geqslant 2$.
   a) Vérifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ et pour tout nombre réel x, on a :
   $f_n(x)=\dfrac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}$.
   b) Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et $+\infty$.
   c) Calculer la dérivée $x \rightarrow f_n'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.