Corrigé du devoir surveillé nº3

Exercice 1 :

Partie A :

1. On a : $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\exp(0+h)-\exp(0)}{h}=\exp'(0)$: c'est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.
   Or, par définition, $\exp'(x)=\exp(x)$ pour tout x, donc : $\exp'(0)=\exp(0)=1$.
   Par conséquent, $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$.

2. On a : $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$, donc d'après les propriétés des limites : $\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{e^h-1}{h}}=\frac{1}{1}=1$.

   Il suffit de remplacer h par x pour obtenir : $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1}$.

3. D'après le cours, on sait que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}=+\infty$.
   On utilise à nouveau le fait que $\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}=0^+$: par composition, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=0$.

   Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0}$.

4. On applique la formule de dérivation d'un quotient : $\boxed{f'(x)=\frac{1\times(e^x-1)-x\times e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x-x e^x-1}{(e^x-1)^2}}$.

5. Ici, on emploie la formule de dérivation d'un produit (que certains ont oubliée) :
   $N'(x)=e^x-(1\times e^x+x\times e^x)=e^x-e^x-x e^x=-x e^x$.
   On voit que $x \geqslant 0$ et $e^x > 0$, donc $N'(x) \leqslant 0$.
   Par conséquent, N est **décroissante** sur $[0 ; +\infty[$.

6. $N(0)=e^0-0\times e^0-1=1-1=0$.
   N est décroissante, donc pour tout $x \geqslant 0$, $N(x)\leqslant N(0)=0$.
   On vérifie ainsi que N est négative sur $[0 ; +\infty[$.

7. On voit que $f'(x)=\frac{N'(x)}{(e^x-1)^2}$. Le dénominateur est positif (c'est un carré) ; le numérateur est négatif, d'après la question précédente. On obtient donc :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

Partie B :

1. C'est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}}$. On peut donc

appliquer la formule : $u_0+u_0 q+u_0 q^2+...+u_0 q^n=u_0 \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Ainsi :

$$1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=1+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2+...+\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}$$ (il y a n termes).

On peut simplifier un peu : $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n=e^{\frac{1}{n}\times n}=e^1=e$.

Par conséquent : $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+...+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)}$.

On en déduit que : $u_n=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$, ce qui se réécrit : $u_n=(e-1)\times\dfrac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}=(e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Il s'agit de chercher la limite de $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On applique donc le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction.

   On a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0\\ \lim\limits_{x\to0} f(x)=1\end{array}\right\}$ donc par composition : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right)=1$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=e-1}$.

Exercice 2 :

1. D'après le graphique, toutes les courbes semblent passer par $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

   Prouvons-le par le calcul : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(0)=\dfrac{e^{-n\times0}}{1+e^{-0}}=\dfrac{e^0}{1+e^0}=\dfrac{1}{2}$.

2.

   a) Remarquons que $f_0(x)=\dfrac{e^{-0\times x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

   On rappelle que la dérivée de $\dfrac{1}{u}$ est $-\dfrac{u'}{u^2}$. Ici, on pose : $u(x)=1+e^{-x}$, donc : $u'(x)=-e^{-x}$.

   On obtient : $f'(x)=\dfrac{-(-e^{x})}{(1+e^{-x})^2}=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

   Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc : $f'>0$ sur $\mathbb{R}$.
   Par conséquent, *f* est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

   b) En $-\infty$:

   $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{-x}=+\infty$.

   On en déduit, d'après les propriétés des limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=0}$.

   En $+\infty$:

   $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x}=1$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+e^{-x}}=1}$.

c) Résumons :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f_0'(x)$	$+$
$f_0(x)$	$0 \nearrow \frac{1}{2} \nearrow 1$

d) On a $\lim_{x \to -\infty} f_0(x)=0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_0(x)=1$; 0,8 est compris entre ces deux limites.
La fonction f_0 est **continue** et **strictement croissante** d'après le tableau.
Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_0(x)=0{,}8$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$.
Grâce à la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha \simeq 1{,}4}$.

3.

a) Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par e^x.

$$f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{nx}\times e^{-nx}}{e^{nx}(1+e^{-x})}=\frac{1}{e^{nx}+e^{nx-x}}=\frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}.$$

b) On va utiliser l'expression de $f_n(x)$ donnée à la question précédente.
En $-\infty$:
Comme $n \geqslant 2$, par composition : $\lim_{x \to -\infty} nx=-\infty$ et $\lim_{y \to -\infty} e^y=0^+$, donc $\lim_{x \to -\infty} e^{nx}=0$.
De même, comme $(n-1) \geqslant 1$, $\lim_{x \to -\infty} (n-1)x=-\infty$ et $\lim_{y \to -\infty} e^y=0^+$, donc $\lim_{x \to -\infty} e^{(n-1)x}=0^+$.
Donc : $\lim_{x \to -\infty} e^{nx}+e^{(n-1)x}=0^+$.

On en déduit, d'après les propriétés des limites : $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}=+\infty$.

En $+\infty$:
Comme $n \geqslant 2$, par composition : $\lim_{x \to +\infty} nx=+\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} e^y=+\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} e^{nx}=+\infty$.
De même, comme $(n-1) \geqslant 1$, $\lim_{x \to +\infty} (n-1)x=+\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} e^y=+\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} e^{(n-1)x}=+\infty$.
Donc : $\lim_{x \to +\infty} e^{nx}+e^{(n-1)x}=+\infty$.

On en déduit, d'après les propriétés des limites : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{nx}+e^{(n-1)x}}=0$.

Conclusion : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_n(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_n(x)=0}$.

c) On a : $f_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}=\frac{u(x)}{v(x)}$ en posant : $u(x)=e^{-nx}$ et $v(x)=1+e^{-x}$.
On en déduit : $u'(x)=-ne^{-nx}$ et $v'(x)=-e^{-x}$.
La formule de dérivation d'un quotient donne :

$$f_n'(x)=\frac{-ne^{-nx}\times(1+e^{-x})-e^{-nx}\times(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}=\frac{-ne^{-nx}-ne^{-nx-x}+e^{-nx-x}}{(1+e^{-x})^2}=\frac{-ne^{-nx}-e^{-(n+1)x}(n-1)}{(1+e^{-x})^2}.$$

On sait que $n \geqslant 2$, donc $-ne^{-nx}<0$; de même, $n-1 \geqslant 1$, donc $-e^{-(n+1)x}(n-1)<0$.
Donc, le numérateur est strictement négatif, et le dénominateur est strictement positif.
Par conséquent, le quotient est strictement négatif.
On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
${f_n}'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0

Voilà.