Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice 1 :

1. .

   a) $\dfrac{e^{3x}}{e^x} = e^x \times e^2$
   équivaut à :
   $e^{3x-x} = e^{x+2}$
   $e^{2x} = e^{x+2}$
   $2x = x+2$ .... car la fonction exponentielle est (strictement) croissante.
   $x = 2$
   $\boxed{\mathscr{S} = \{2\}}$

   b) $(e^x)^3 \times e^2 \leq \dfrac{e^5}{e^{-x}}$
   équivaut à :
   $e^{3x} \times e^2 \leq e^{5-(-x)}$
   $e^{3x+2} \leq e^{5+x}$
   $3x+2 \leq 5+x$ .... car la fonction exponentielle est (strictement) croissante.
   $2x \leq 3$
   $x \leq \dfrac{3}{2}$ .... le sens de l'inégalité ne change pas car on divise par un nombre positif.
   $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right]}$

2. .

   a) $f : f(x) = 3\sqrt{2} + e^{-x}$
   On utilise la propriété connue : si $u(x) = e^{ax+b}$ alors $u'(x) = a\, e^{ax+b}$; ici, $a = -1$ et $b = 0$.
   $f'(x) = 0 + (-1) \times e^{-x}$
   $\boxed{f'(x) = -e^{-x}}$

   b) $g : g(x) = (x+2) \times (e^x)^5$
   On pose : $u(x) = x+2$ et $v(x) = (e^x)^5 = e^{5x}$.
   On a alors : $g(x) = u(x)v(x)$ donc $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
   $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 5\,e^{5x}$ (même formule que précédemment.)
   Donc : $g'(x) = 1 \times e^{5x} + (x+2) \times 5\,e^{5x}$
   $g'(x) = e^{5x} + (5x+10)\,e^{5x}$
   $g'(x) = e^{5x}(1+5x+10)$
   $\boxed{g'(x) = e^{5x}(5x+11)}$

   c) $h : h(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}$
   On pose : $u(x) = e^x + 1$ et $v(x) = e^{2x} + 1$.
   On a alors : $h(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, donc $h'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
   $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = 2\,e^{2x}$
   Donc : $h'(x) = \dfrac{e^x \times (e^{2x}+1) - (e^x+1)2 \times e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

   $$h'(x) = \frac{e^x \times e^{2x} + e^x \times 1 - e^x \times 2\,e^{2x} - 1 \times 2\,e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^{3x} + e^{x} - 2e^{3x} - 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$h'(x) = \dfrac{-e^{3x} - 2e^{2x} + e^{x}}{(e^{2x}+1)^2}$ .... forme développée du numérateur.

$\boxed{h'(x) = \dfrac{-e^{x}(e^{2x} + 2e^{x} - 1)}{(e^{2x}+1)^2}}$ .... si on factorise par $-e^{x}$.

3. .

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} - 3x$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$.

Il n'y a pas de forme indéterminée, on peut conclure :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} - 3x = +\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} - 5}{x}$

Ici, on a une forme indéterminée, car le numérateur et le dénominateur ont pour limite $+\infty$.

On "casse" la fraction : $\dfrac{e^{x} - 5}{x} = \dfrac{e^{x}}{x} - \dfrac{5}{x}$.

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ .... d'après le cours

et : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x} = 0$

Il n'y a plus de forme indéterminée ; on peut conclure : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x} - 5}{x} = +\infty}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{e^{3x}}{x-2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} e^{3x} = e^{6}$ .... e^{6} est différent de 0 et positif.

D'autre part : $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} x - 2 = 0^{-}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

La limite du produit s'en déduit d'après les propriétés des limites : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} \dfrac{e^{3x}}{x-2} = -\infty}$

Exercice 2 :

Partie A :

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) s'obtient par la formule : $m = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$.

   Ici : $m = \dfrac{1-(-3)}{0-(-1)} = \dfrac{4}{1} = 4$

2. On pose comme d'habitude : $u(x) = ax + b$ et $v(x) = e^{2x}$.

   Alors $f(x) = u(x)v(x)$ donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

   $u'(x) = a$ et $v'(x) = 2e^{2x}$

   Donc : $f'(x) = a \times e^{2x} + (ax+b) \times 2e^{2x} = a e^{2x} + 2ax e^{2x} + 2b e^{2x} = (a + 2ax + 2b)e^{2x} = (2ax + a + 2b)e^{2x}$.

3. $f(0) = (a \times 0 + b)e^{0} = b \times 1 = b$

   $f'(0) = (2a \times 0 + a + 2b)e^{0} = (a + 2b) \times 1 = a + 2b$

4. D'après l'énoncé, $\mathscr{C}$ passe par le point $A(0;1)$, donc $f(0) = 1$. Or, d'après la question précédente, $f(0) = b$. Par conséquent, $b = 1$.
   D'autre part, on sait que $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, c'est à dire en A. Cette tangente est la droite (AB), et son coefficient directeur est 4, d'après la question 1.
   Or, d'après la question précédente, $f'(0) = a + 2b$.
   On a donc : $a + 2b = 4$. En tenant compte du fait que $b = 1$, on obtient : $a + 2 = 4$ donc $a = 2$.

Partie B :

On suppose à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

1. On peut calculer $f'(x)$ directement à partir de la formule. On peut aussi se servir de la partie A.
   En effet, on a ici : $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{2x}$ avec $a = 2$ et $b = 1$.
   Il suffit donc de remplacer dans la formule trouvée en A-2 : $f'(x) = (2 \times 2x + 2 + 2 \times 1)\mathrm{e}^{2x}$.
   Ainsi : $\boxed{f'(x) = (4x+4)\mathrm{e}^{2x}}$
   Étudions le signe de f'. On sait que pour tout x, $\mathrm{e}^{2x} > 0$. Le signe de f' est donc le signe de $4x+4$. C'est une expression du premier degré qui s'annule en -1.
   On obtient le tableau :

x	$-\infty$		-1	0	$+\infty$
$4x+4$		$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le tableau précédent, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(-1) = (2 \times (-1) + 1)\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}$.
   On trouve à la calculette : $-\mathrm{e}^{-2} \cong -0{,}135$.
3. Limite en $-\infty$:
   Pour lever la forme indéterminée, on développe : $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+1)\mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{2x}$.
   On sait que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ et que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$.
   On en déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

   Limite en $+\infty$:
   On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 1 = +\infty$ et : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$.
   On en déduit (limite d'un produit) : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
4. D'après le tableau, il n'ya pas d'asymptote verticale, car f est continue sur $\mathbb{R}$.
   En $+\infty$, la limite est $+\infty$, donc pas d'asymptote horizontale.
   En $-\infty$, la limite est finie, égale à 0. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
5. On veut résoudre l'équation $f(x) = 2$.

a) Sur l'intervalle $]-\infty;-1]$:

D'après le tableau, lorsque $x \leq -1$, $f(x) \leq 0$. Donc l'équation $f(x) = 2$ n' a pas de solution sur cet intervalle.

b) Sur l'intervalle $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$:

On a : $f(-1) \cong -0{,}135$ (d'après la question B-2)

et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}} = (1+1)\mathrm{e}^1 = 2\,\mathrm{e} \cong 5{,}4$.

Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

D'autre part, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$.

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique sur cet intervalle.

c) Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$:

La fonction f est croissante sur cet intervalle (d'après le tableau). Donc pour tout x, $f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) \cong 5{,}4$.

Vu que $2 < 5{,}4$ l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

d) On peut déduire des questions (a), (b) et (c) que l'équation $f(x) = 2$ a une solution unique sur $\mathbb{R}$.

On a vu que α appartient à l'intervalle $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$. On peut donc faire un tableau de valeurs à la calculatrice en partant de la valeur initiale $x_{min} = -1$. On peut même partir de $x_{min} = 0$ puisque $f(0) = 1$.

On trouve $\alpha \cong 0{,}19$