Mathématiques - Devoir surveillé n° 3

Exercice 1 (8 points) :

1. Résoudre les équations et inéquations suivantes.
   a) $\dfrac{e^{3x}}{e^x} = e^x \times e^2$
   b) $(e^x)^3 \times e^2 \leq \dfrac{e^5}{e^{-x}}$
2. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.
   a) $f : f(x) = 3\sqrt{2} + e^{-x}$
   b) $g : g(x) = (x+2) \times (e^x)^5$
   c) $h : h(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}$
3. Déterminer les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 3x$
   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 5}{x}$
   c) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \dfrac{e^{3x}}{x-2}$

Exercice 2 (12 points) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax+b)e^{2x}$ où a et b sont deux nombres réels. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On sait que $\mathscr{C}$ passe par le point $A(0;1)$ et que la tangente à $\mathscr{C}$ en A passe par le point $B(-1;-3)$.

Partie A :

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Démontrer que pour tout x, $f'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x}$.
3. Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de a et b.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de a et b.

Partie B :

On suppose à présent que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (2x+1)e^{2x}$.

1. Calculer $f'(x)$ (on peut se servir de la partie A.) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer la valeur du minimum de f sur $\mathbb{R}$, et en donner une valeur approchée.
3. Déterminer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et $+\infty$. Compléter le tableau.
4. En déduire la présence éventuelle d'asymptotes horizontales ou verticales.
5. On veut résoudre l'équation $f(x) = 2$.
   a) Démontrer que cette équation n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty;-1]$.
   b) Démontrer que cette équation a une solution unique sur l'intervalle $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$.
   c) Démontrer que cette équation n'a pas de solution sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

d) Soit α la solution de l'équation $f(x) = 2$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.