Exercices sur la fonction exponentielle

Exercice 1 :

Simplifier les écritures suivantes :

$A = (\mathrm{e}^x)^2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$; $B = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$; $C = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$; $D = \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$; $E = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2}{\mathrm{e}^{2x-1}}$.

Exercice 2 :

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $\mathrm{e}^{3x-2} = \mathrm{e}^{x^2}$ b) $\mathrm{e}^x \cdot (\mathrm{e}^x)^3 = \mathrm{e}^{x^2}$ c) $\mathrm{e}^{3x} \cdot \sqrt{\mathrm{e}} \leq \dfrac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-x}}$ d) $\mathrm{e}^{3x+1} \cdot \mathrm{e}^{-x} \leq -2$

Exercice 3 :

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

$f : f(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{x} + 3\,\mathrm{e}^x$; $g : g(x) = x^5 \cdot \mathrm{e}^x$; $h : h(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$; $i : i(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$; $j : j(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$;

Exercice 4 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes en $-\infty$, $+\infty$ et 0 (il faudra peut-être distinguer 0^+ et 0^-) :

$f(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$; $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3x}$; $h(x) = (5x+2)\,\mathrm{e}^x$; $i(x) = \mathrm{e}^x - 7x$; $j(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{5x} - 1}{x}$

Exercice 5 :

Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation.
2. Démontrer que f admet un maximum sur $[0\,;+\infty[$, déterminer sa valeur et une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. Déterminer l'équation de la tangente T en 1 à $\mathscr{C}$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T sur l'intervalle $[-1;5]$.

Exercice 6 :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, f, la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^m}{\mathrm{e}^x}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation.
2. Démontrer que que f est bornée.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$.

Exercice 7 :

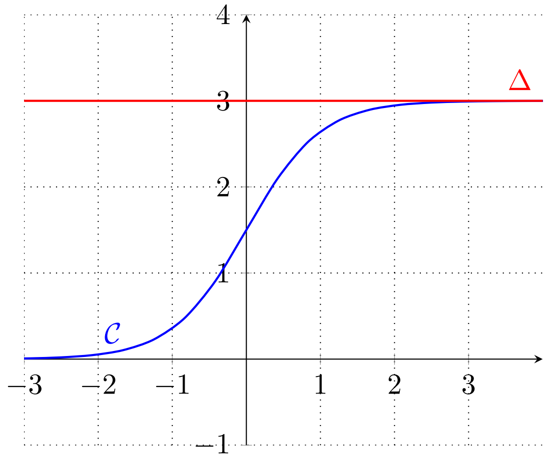
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variations de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

Exercice 8 (Pondichéry 2015) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

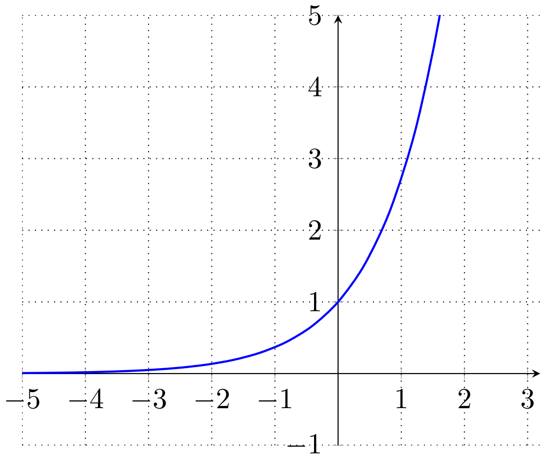
Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 9 (Liban 2015) :

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
   Démontrer que la droite $\mathcal{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.
2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.
3. Démontrer cette conjecture.

Exercice 10 (Centres étrangers 2015) :

Soit a un nombre réel fixé non nul. Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

   (a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)\left(2\mathrm{e}^{x} + 1\right)$.

   (b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

   (c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

   (b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

   (c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
   La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.
   L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que … … … Fin tant que
Sortie	Afficher n

   (a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

Exercice 11 :

Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) = 1$ et vérifiant pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$. En déduire que $f(0) = 1$.

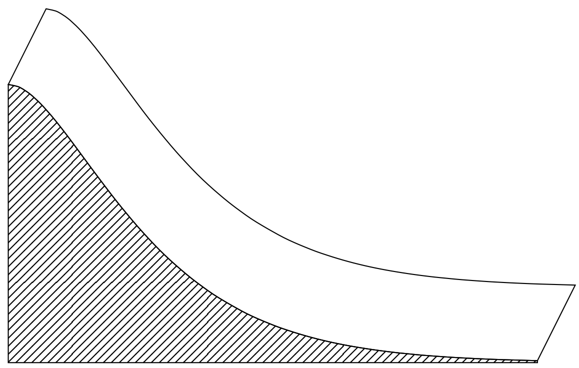
2. (a) Montrer que pour tout réel x et tout réel h non nul, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \times \dfrac{f(h) - 1}{h}$

   (b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.

Exercice 12 (Polynésie 2015) :

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

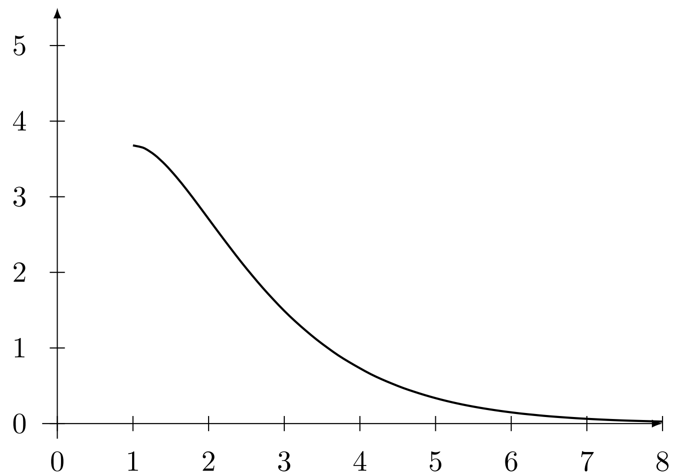


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 8]$ par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1 ; 8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,8]$ par

$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

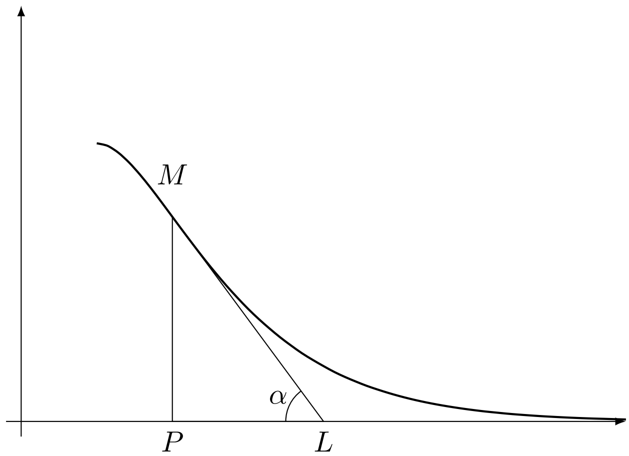
   Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?