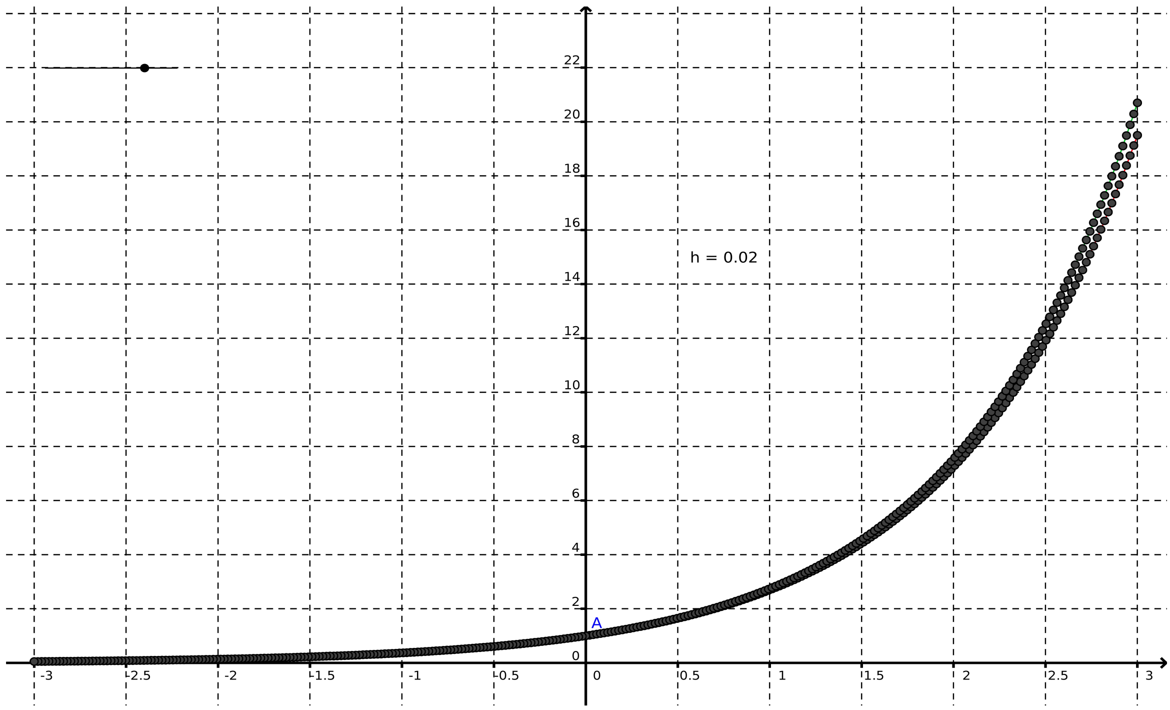

2) Programmation

Pour programmer l'algorithme de la méthode d'Euler, on va calculer les différentes valeurs prises par les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) ; les résultats pourront être soit un tableau de valeurs, soit une courbe.

Le pseudo-code pour obtenir les deux courbes :

Variables : x_0 ; y_0 ; z_0 (les valeurs initiales) ; $x_{\min}$ et $x_{\max}$; h le pas de la subdivision ; x_n, y_n, et z_n, les valeurs.

Initialisation :

Entrer x_0, $y_0 = z_0$, $x_{\min}$, $x_{\max}$, h.

Vérifier que $x_{\min} < x_0 < x_{\max}$. ; et $|h|<1$

Partie située à droite de x_0 :

x_n prend la valeur x_0 ; y_n prend la valeur y_0 ; z_n prend la valeur z_0.

Tant que $x_n \le x_{\max}$ faire :

x_n prend la valeur $x_n + h$
y_n prend la valeur $y_n \cdot (1+h)$
z_n prend la valeur $z_n \div (1-h)$

Afficher le point de coordonnées $(x_n ; y_n)$ et le point de coordonnées $(x_n ; z_n)$

Fin tant que

Partie située à gauche de x_0 : (on remplace h par $-h$.)

x_n prend la valeur x_0 ; y_n prend la valeur y_0 ; z_n prend la valeur z_0.

Tant que $x_n \ge x_{\min}$ faire :

x_n prend la valeur $x_n - h$
y_n prend la valeur $y_n \cdot (1-h)$
z_n prend la valeur $z_n \div (1+h)$

Afficher le point de coordonnées $(x_n ; y_n)$ et le point de coordonnées $(x_n ; z_n)$

Fin tant que

Fin du programme

3) Étude en un point donné

a) Définition des suites (u_n) et (v_n)

Soit a un nombre réel fixé.

On partage l'intervalle [0 ; a] ou [a ; 0] en n parties égales (n fixé, pour l'instant.) Ainsi : $h=\frac{a}{n}$.

Vu ce qui précède, on prend $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ comme valeur approchée de $f(a)$.

On va regarder à présent ce qui se passe lorsque n devient de plus en plus grand.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\boxed{u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $n>|a|$: $\boxed{v_n=\frac{1}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}=\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-n}}$.

(On a précisé $n>|a|$ pour être sûr que $1-\frac{a}{n}$ ne s'annule pas.)

On a alors à répondre aux questions suivantes : (u_n) est-elle convergente, et pour quelles valeurs de a ? Si oui, la fonction f définie par $f(a)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ est-elle solution de l'équation différentielle du début ?

b) Résultats admis

On peut démontrer, avec quelques pages de calculs que :

1. (u_n) et (v_n) sont adjacentes, ce qui montre qu'elles convergent vers la même limite l. On pose alors : $f(a) = l$.
2. La fonction f définie ainsi est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. On a $\boxed{\text{pour tout } a\in\mathbb{R},\ f'(a)=f(a)}$.
   Autrement dit, la dérivée de f est f elle-même.

On a donc répondu à la question de départ : Il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$.

La fonction f solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = y$ et telle que $f(0) = 1$ s'appelle la **fonction exponentielle**.

II] Définition et propriétés

1) Définition :

On admet qu'il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, pour laquelle l'image de 0 est 1. On l'appelle la fonction exponentielle, notée exp.

Ainsi : $\boxed{\begin{cases}\exp'(x)=\exp(x) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}\\ \exp(0)=1\end{cases}}$.

Démonstration de l'unicité :

a) On montre d'abord que $\mathbf{exp(x) > 0}$ pour tout x.

On a vu que pour tout a réel, $\exp(a)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-n}$.

Si $a \geq 0$, alors $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geq 1$ pour tout n, donc $\exp(a)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geq 1$.

Si $a<0$, on a $-a>0$, et : $\exp(-a)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{(-a)}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n} \geq 1$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n}}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n}}=\frac{1}{\exp(-a)}$. Donc : $\exp(a)=\frac{1}{\exp(-a)}>0$.

On verra en exercice une autre démonstration de cette propriété.

b) Supposons qu'il existe une autre fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On pose $g(x)=\frac{f(x)}{\exp(x)}$; g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque $\exp(x) > 0$ pour tout x. On a :

$$g'(x)=\frac{f'(x)\cdot\exp(x)-f(x)\cdot\exp'(x)}{(\exp(x))^2}=\frac{f(x)\cdot\exp(x)-f(x)\cdot\exp(x)}{(\exp(x))^2}=\frac{0}{(\exp(x))^2}=0$$

Comme $g'(x) = 0$ pour tout x, alors g est une fonction constante. Donc pour tout x, $g(x) = g(0)$.

Or $g(0)=\frac{f(0)}{\exp(0)}=\frac{1}{1}=1$.

On en déduit : pour tout x, $g(x)=\frac{f(x)}{\exp(x)}=1$ donc $f(x)=\exp(x)$.

Conclusion : Il existe une seule fonction satisfaisant aux conditions données.

2) Propriété 1 : relation fonctionnelle

Pour tous réels a et b, on a : $\boxed{\exp(a+b)=\exp(a)\cdot\exp(b)}$. Autrement dit, la fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration : On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}=k\cdot\exp(x+b)$, en posant : $k=\frac{1}{\exp(b)}$.

Posons g : $g(x)=\exp(ax+b)$. Alors on a d'après le cours de dérivation de première : $g'(x)=a\cdot\exp'(ax+b)=a\cdot\exp(ax+b)$.

Cela donne pour f : $f'(x)=k\times1\times\exp(x+b)$ soit : $f'(x)=\frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}$. Autrement dit, $f' = f$.

D'autre part, $f(0)=\frac{\exp(0+b)}{\exp(b)}=1$.

Donc, la fonction f vérifie : $\begin{cases} f'(x)=f(x) \text{ pour tout } x\in\mathbb{R} \\ f(0)=1 \end{cases}$, c'est à dire les deux conditions définissant la fonction exponentielle. Comme il existe une seule fonction qui vérifie ces deux conditions, alors la fonction f et la fonction exponentielle ne font qu'un.

On en déduit : pour tout x, $\frac{\exp(x+b)}{\exp(b)}=\exp(x)$, donc $\exp(x+b)=\exp(x)\cdot\exp(b)$.

En posant $x = a$, on retrouve la formule, qui est à présent démontrée.

On verra en exercice une autre démonstration (assez voisine) de cette propriété.

Conséquences :

1) On a vu que $\exp(-b)=\dfrac{1}{\exp(b)}$. En combinant avec la propriété 1, on obtient :

Pour tous réel *a* et *b*, $\exp(a-b)=\dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

2) Pour tout $a\in\mathbb{R}$ et tout $n\in\mathbb{Z}$: $\exp(n\cdot a)=\left(\exp(a)\right)^n$

En effet, si $n\in\mathbb{N}^*$: $\exp(n\cdot a)=\exp\underbrace{(a+a+\ldots+a)}_{n\text{ termes}}=\underbrace{\exp(a)\times\exp(a)\times\ldots\times\exp(a)}_{n\text{ facteurs}}=\left(\exp(a)\right)^n$.

Et $\exp(-n\cdot a)=\exp(n\cdot(-a))=\left(\exp(-a)\right)^n=\left(\dfrac{1}{\exp(a)}\right)^n=\left(\exp(a)\right)^{-n}$.

En particulier, si on pose *e* = exp(1), on obtient : $\exp(n)=\exp(n\cdot 1)=\left(\exp(1)\right)^n=(e)^n$.

Notons encore que $\exp(a)=\exp\left(n\cdot\dfrac{a}{n}\right)=\exp\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ donc $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right)=\sqrt[n]{\exp(a)}$.

2) Notation e^n

Comme on a pour tout $n\in\mathbb{Z}$: $\exp(n)=e^n$, on convient de **poser** : pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{e^x=\exp(x)}$.

Attention : Il faut bien comprendre que, pour *x* non entier, **ce n'est qu'une notation**, souvent commode, parfois source d'erreur.

L'avantage essentiel est que, lorsqu'on les exprime avec la nouvelle notation, la propriété 1 et ses conséquences prennent tout à coup un air familier :

$e^{a+b}=e^a\cdot e^b$ $\quad e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$ $\quad e^{na}=(e^a)^n$, etc.

On retrouve les propriétés des puissances, sauf qu'ici, les exposants sont des réels quelconques.

Remarque : on aimerait bien définir des puissances non entières pour d'autres nombres que *e*. Ceci nous sera possible quand nous aurons étudié la fonction logarithme.

3) Étude de la fonction exponentielle

Propriété 2 (variations) :

On a pour tout *x* : exp'(*x*) = exp(*x*) et exp(*x*) > 0. Donc **exp est strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3 (limites) :

Pour tout *x* réel : $e^x=\exp(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Or, d'après l'inégalité de Bernoulli, si $-1<\dfrac{x}{n}$ alors : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\geq 1+n\cdot\dfrac{x}{n}$.

Or on a $-1<\dfrac{x}{n}$ dès que $-n<x$ c'est à dire $n>-x$.

Donc, pour *n* assez grand, on a : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\geq 1+x$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\geq 1+x$, ce qui s'écrit encore :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{e^x\geq 1+x}$.

En particulier, on en déduit : $e = e^1 \geq 2$.

D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1+x=+\infty$. La fonction exponentielle est donc minorée par une fonction qui a pour limite +∞ en +∞. Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x=+\infty}$.

Posant $y = -x$, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{y \to +\infty} e^{-y} = \lim\limits_{y \to -\infty} \dfrac{1}{e^y}=0$. Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x=0}$.

En résumé :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$e^{x} = \exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

Propriété 4 (croissance comparée) :

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq 1+x$.
Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit : pour tout $y > -1$, $(e^y)^2 \geq (1+y)^2$, c'est à dire : $e^{2y} \geq 1+2y+y^2$ et donc, en divisant par 2y (qui est positif) : $\dfrac{e^{2y}}{2y} \geq \dfrac{1}{2y}+1+\dfrac{y}{2}$.

Or, $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{2y}+1+\dfrac{y}{2}=+\infty$.

On en déduit : $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{e^{2y}}{2y}=+\infty$.

Si on pose à présent $2y = x$, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty}$.

On en déduit, en prenant l'inverse que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t}=0^+$.

Si on pose $t = -x$, on a : $x \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(-x)}{e^{-x}}=0^+$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}}=0^-$, ce qui s'écrit encore : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x=0^-}$.