Introduction à la fonction exponentielle

I] Au départ : une équation différentielle.

Le problème posé est le suivant : existe-t-il une fonction définie et dérivable sur un certain intervalle et égale à sa dérivée ?

Autrement dit, on cherche à résoudre l'équation différentielle : $y' = y$, avec $(x_0 ; y_0) = (0 ; 1)$.

Pour cela, on va utiliser la méthode d'Euler.

On cherche donc une fonction f telle que $f\,'(x) = f\,(x)$ avec $f(0) = 1$.

On choisit x_0 , y_0 et h : le pas de la subdivision. À chaque étape, on obtiendra alors deux nombres x_k et y_k telles que : $\begin{cases} x_{k+1}=x_k+h \\ y_{k+1}=a_k h+y_k \end{cases}$ où a_k est une valeur approchée du nombre dérivé en $x = x_k$.

Compte tenu de la relation $y' = y$, on prend : $a_k = y_k$.

Résumons : $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=1 \\ x_{k+1}=x_k+h \\ y_{k+1}=y_k \cdot h+y_k \end{cases}$. On construit la suite des points $M_n(x_n ; y_n)$.

Calculs préliminaires :

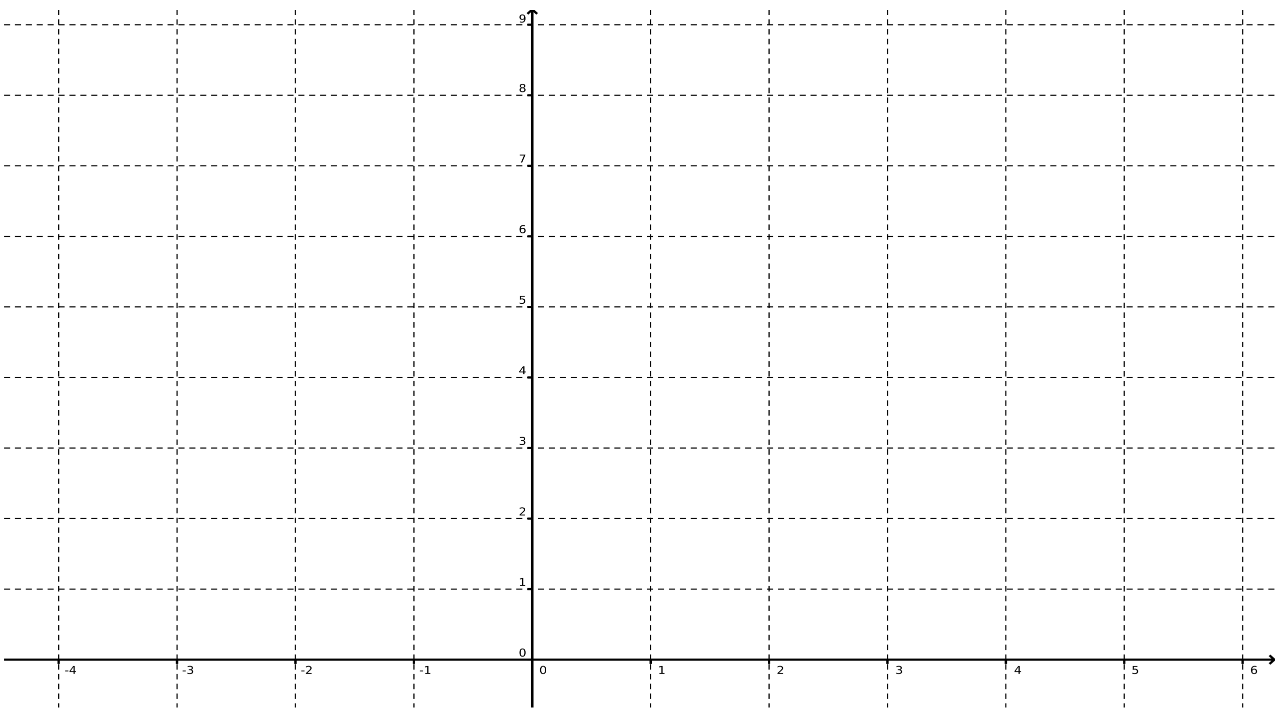
Comme $x_{k+1}=x_k+h$, alors la suite formée par les valeurs x_k est arithmétique : $x_k=x_0+kh$.

D'autre part : $y_{k+1}=y_k h+y_k=y_k(1+h)$ donc la suite des y_k est géométrique de raison $(1+h)$.

II] Les graphiques sur [-3 ; 3]

1) Avec un pas $h=1$ à droite de 0 et $h=-1$ à gauche de 0

x_k	-3	-2	-1	0	1	2	3
y_k				1			



2) Avec un pas h=0,5 à droite de 0 et h=−0,5 à gauche de 0

x_k	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y_k							1						

3) Avec un pas h=0,1 à droite de 0 et h=−0,1 à gauche de 0

x_k	-3	-2,9	-2,8	-2,7	-2,6	-2,5	-2,4	-2,3	-2,2	-2,1	-2	-1,9	-1,8	-1,7	-1,6	-1,5	-1,4	-1,3	-1,2	-1,1	-1
y_k																					

x_k	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_k											1										

x_k	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
y_k