La fonction exponentielle

1 Définition

Définition 1

Il existe une unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, pour laquelle l'image de 0 est 1. On l'appelle la fonction exponentielle, notée exp.

Ainsi : $\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$

L'existence de cette fonction est admise.

Démonstration de l'unicité :

1) On démontre d'abord une formule utile :

Soient a et b deux réels et f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Si $g(x) = f(ax+b)$, alors $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

En effet :

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{h}$$

On multiplie le dénominateur et le numérateur par a :

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} a \times \frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}$$

Posons : $y = ax+b$ et $k = ah$. On voit que h tend vers 0 si et seulement si k tend vers 0.

On peut donc réécrire l'égalité précédente sous la forme :

$$g'(x) = \lim_{k\to 0} a \times \frac{f(y+k)-f(y)}{k} = a \times \lim_{k\to 0} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} = a \times f'(y)$$

Remplaçant y par $ax+b$, on obtient bien : $g'(x) = a \times f'(ax+b)$

2) Appliquons cette propriété.

Soit f une fonction qui vérifie les mêmes conditions que la fonction exponentielle : $\begin{cases} \forall x : f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Soit c un réel quelconque. Posons : $g(x) = \exp(c-x) \times f(x)$.

Calculons g'. C'est la dérivée d'un produit. Posons $u(x) = \exp(c-x)$.

On applique la formule du paragraphe (1), en prenant $a = -1$ et $b = c$: $u'(x) = (-1) \times \exp'(c-x)$.

Donc : $g'(x) = u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = (-1) \times \exp'(c-x) \times f(x) + \exp(c-x) \times f'(x)$.

On obtient, en tenant compte du fait que $\exp' = \exp$ et $f' = f$:

$$g'(x) = -\exp(c-x) \times f(x) + \exp(c-x) \times f(x) = 0$$

On constate que la dérivée de g est la fonction nulle. Donc (cours de première), g est une fonction *constante.*

On a donc : $g(0) = g(c)$, ce qui s'exprime ainsi :

$$\exp(c-0) \times f(0) = \exp(c-c) \times f(c)$$

Comme $\exp(0) = 1$ et $f(0) = 1$, cela donne : $\exp(c) = f(c)$.

On constate que tout réel c a la même image par les deux fonctions : f est bien identique à la fonction exponentielle.

2 Relation fonctionnelle

Propriété 1

> Pour tous réels a et b, on a : $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$. Autrement dit, la fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Démonstration : Reprenons les notations du paragraphe précédent. On a démontré que la fonction f est identique à la fonction exp.
La fonction g est donc définie par : $g(x) = \exp(c-x) \times \exp(x)$.
D'autre part, on a démontré que cette fonction g est constante.
Posons $c = a+b$, on obtient : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \exp(a+b-x) \times \exp(x)$ est constant.
En particulier : $g(0) = g(b)$, ce qui s'écrit : $\exp(a+b) \times \exp(0) = \exp(a) \times \exp(b)$.
Tenant compte du fait que $\exp(0) = 1$, ceci démontre la formule. ■

Conséquences :

1. En prenant $a = -b$, on voit que $\exp(b) \times \exp(-b) = \exp(b-b) = \exp(0) = 1$.
   Par conséquent, pour tout réel b : $\exp(-b) = \dfrac{1}{\exp(b)}$.
   Cela indique que $\exp(b) \neq 0$. Autrement dit, la fonction exponentielle **ne s'annule pas**.
   On en déduit : pour tous réels a et b, $\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(n \cdot a) = (\exp(a))^n$
   En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
   $\exp(n \times a) = \exp\underbrace{(a+a+...+a)}_{n \text{ termes}} = \underbrace{\exp(a) \times \exp(a) \times ... \times \exp(a)}_{n \text{ facteurs}} = (\exp(a))^n$.
   Et $\exp(-n \cdot a) = \exp(n \cdot (-a)) = (\exp(-a))^n = \left(\dfrac{1}{\exp(a)}\right)^n = (\exp(a))^{-n}$.
3. En particulier, si on pose $\mathrm{e} = \exp(1)$, on obtient : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
4. En prenant $n = 2$ et $a = \frac{x}{2}$, on peut écrire : $\exp(x) = \exp(2 \times \frac{x}{2}) = \left(\exp(\frac{x}{2})\right)^2$.
   Ainsi, $\exp(x)$ est un carré, donc positif.
   Vu que la fonction exp ne s'annule pas, on obtient : pour tout x, $\exp(x) > 0$.
5. Notons encore que $\exp(a) = \exp\left(n \cdot \dfrac{a}{n}\right) = \exp\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$ donc $\exp\left(\dfrac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(a)}$.

3 Notation e^x

On a vu que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\exp(n) = \mathrm{e}^n$.

On convient alors de **poser** : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \exp(x)$.

Attention : Il faut bien comprendre que, pour x non entier, **ce n'est qu'une notation**, souvent commode, parfois source d'erreur.

L'avantage essentiel est que, lorsqu'on les exprime avec la nouvelle notation, la propriété 1 et ses conséquences prennent tout à coup un air familier :

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n, \text{ etc.}$$

On retrouve les propriétés des puissances, sauf qu'ici, les exposants sont des réels quelconques.

Remarque : on aimerait bien définir des puissances non entières pour d'autres nombres que e. Ceci nous sera possible quand nous aurons étudié la fonction logarithme.

4 Étude de la fonction exponentielle

Propriété 2

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable).

Comme conséquence de la propriété 1, on a démontré :

Propriété 3 (*signe*)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$.

Propriété 4 (*variations*)

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Pour tout x, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(x) > 0$. ■

Étude des limites :

Commençons par étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - (x+1)$.

On a : $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. La fonction exp est croissante et exp(0)=1. On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		0	$\nearrow$	

Le tableau montre que pour tout x, $f(x) \geqslant 0$ ce qui s'écrit encore :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. (En particulier, on en déduit : $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 \geqslant 2$.)

D'autre part, on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty$. La fonction exponentielle est donc minorée par une fonction qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

D'après le théorème de comparaison (th. 7 du cours sur les limites), ceci implique : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Posant $y = -x$, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{y \to +\infty} \mathrm{e}^{-y} = \lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^y} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

On obtient :

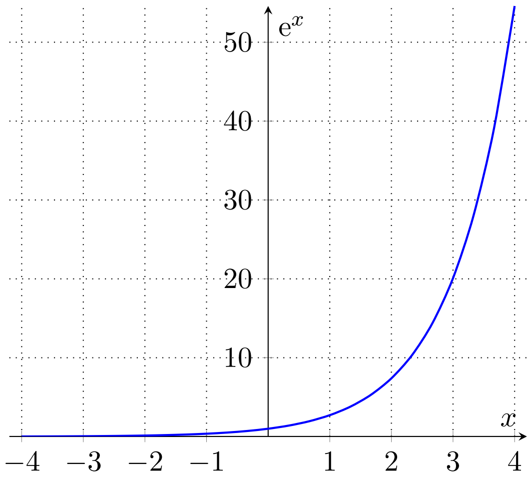
Propriété 5 (*limites usuelles*)

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

En résumé :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	e $\nearrow$	$+\infty$

La courbe :



5 Trois limites importantes

Croissance comparée en $\pm\infty$:

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq 1 + x$.

Comme la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit : pour tout $y \geq 0$, $(e^y)^2 \geq (1+y)^2$, c'est à dire : $e^{2y} \geq 1 + 2y + y^2$ et donc, en divisant par $2y$ (qui est positif) : $\dfrac{e^{2y}}{2y} \geq \dfrac{1}{2y} + 1 + \dfrac{y}{2}$.

Or, $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2y} + 1 + \frac{y}{2} = +\infty$.

On en déduit : $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{2y}}{2y} = +\infty$.

Si on pose à présent $2y = t$, on obtient : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

On en déduit, en prenant l'inverse que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0^+$. Si on pose $t = -x$, on a : $x \to -\infty$ lorsque $t \to +\infty$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)}{e^{-x}} = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0^-$, ce qui s'écrit encore : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0^-$.

Variation en 0 :

On calcule de deux façon le nombre dérivé de exp en 0.

D'abord, par définition : $\exp'(0) = \displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\exp(0+h) - \exp(0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\exp(h) - 1}{h}$.

D'autre part $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

En remplaçant h par x (c'est plus habituel), on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Rassemblons ces résultats :

Propriété 6

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0^- \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$