MATHÉMATIQUES - Devoir surveillé nº6

Exercice 1 :

L'espace est rapporté au repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) .

1. $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$; $J\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$; $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

2.

a) D'après la question 1, on a : $\overrightarrow{IK}\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$; $\overrightarrow{IJ}\left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK}=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times0+1\times1=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{IK}$.

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ}=2\times0+1\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1\times\left(\frac{1}{2}\right)=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{IJ}$.

b) Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), donc il est normal à (IJK).

Par conséquent, pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de (IJK), on a : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IM}=0$.

On a $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y-\frac{1}{2}\\z\end{pmatrix}$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IM}=2(x-1)+1\left(y-\frac{1}{2}\right)+1\times z=0$

Donc : $2x+y+z-\frac{5}{2}=0$.

On multiplie la ligne par 2 pour chasser la fraction : $4x+2y+2z-5=0$.

Donc, le plan (IJK) admet bien pour équation cartésienne : $4x+2y+2z-5=0$

3.

a) On a $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Donc, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CD}$, soit $\begin{cases}x=1-t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

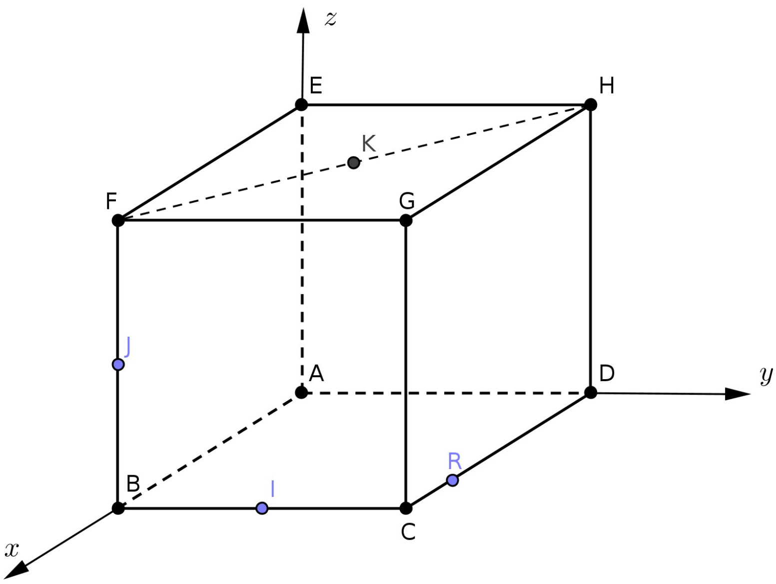
Ce système constitue un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b) Les coordonnées de R vérifient le système d'équations paramétriques de la droite (CD) obtenu précédemment, puisque $R\in(CD)$, et aussi l'équation cartésienne de (IJK), puisque $R\in(IJK)$.

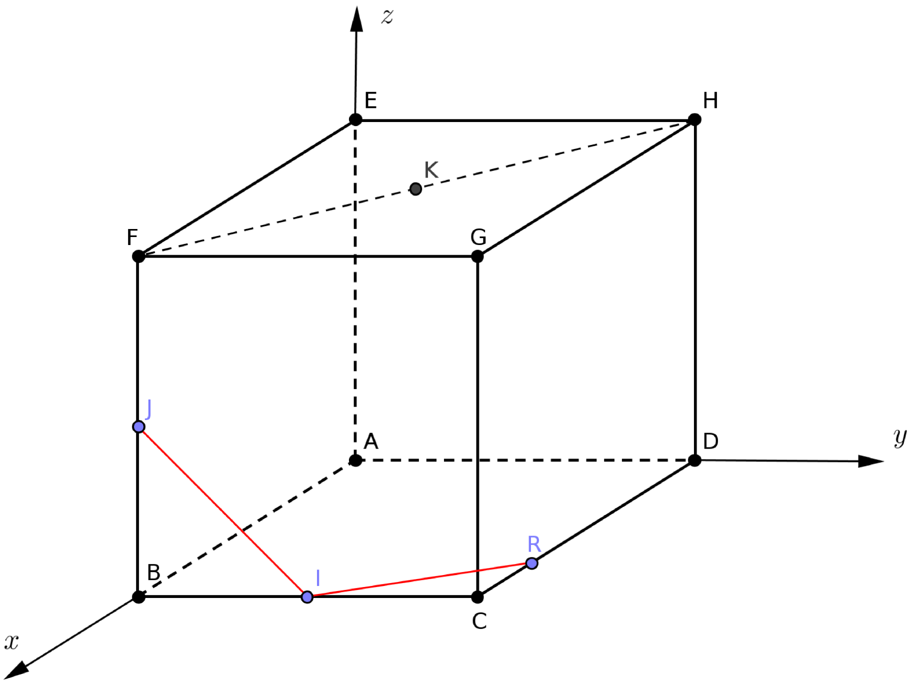
Elles sont donc solution du système suivant : $\begin{cases}x=1-t\\y=1\\z=0\\4x+2y+2z-5=0\end{cases}$.

On remplace x, y et z dans la dernière ligne : $4(1-t)+2\times1+2\times0-5=0$ soit $-4t+1=0$.

On trouve donc : $t=\frac{1}{4}$, et donc : $\begin{cases}x=1-\frac{1}{4}\\y=1\\z=0\end{cases}$. Donc R a pour coordonnées : $R\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}$.

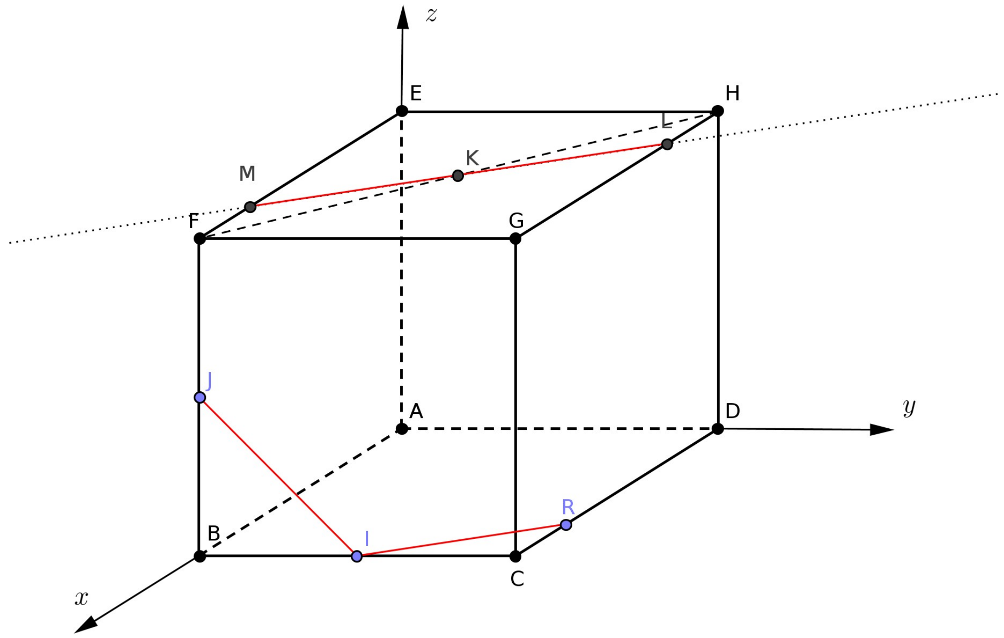


4. Il y a plusieurs façons de procéder. Une construction possible est la suivante.
   Étape 1 :
   La droite (RI) appartient à (IJK), donc la section du cube par (IJK) contient le segment [RI].
   De même pour le segment [JI], bien sûr.

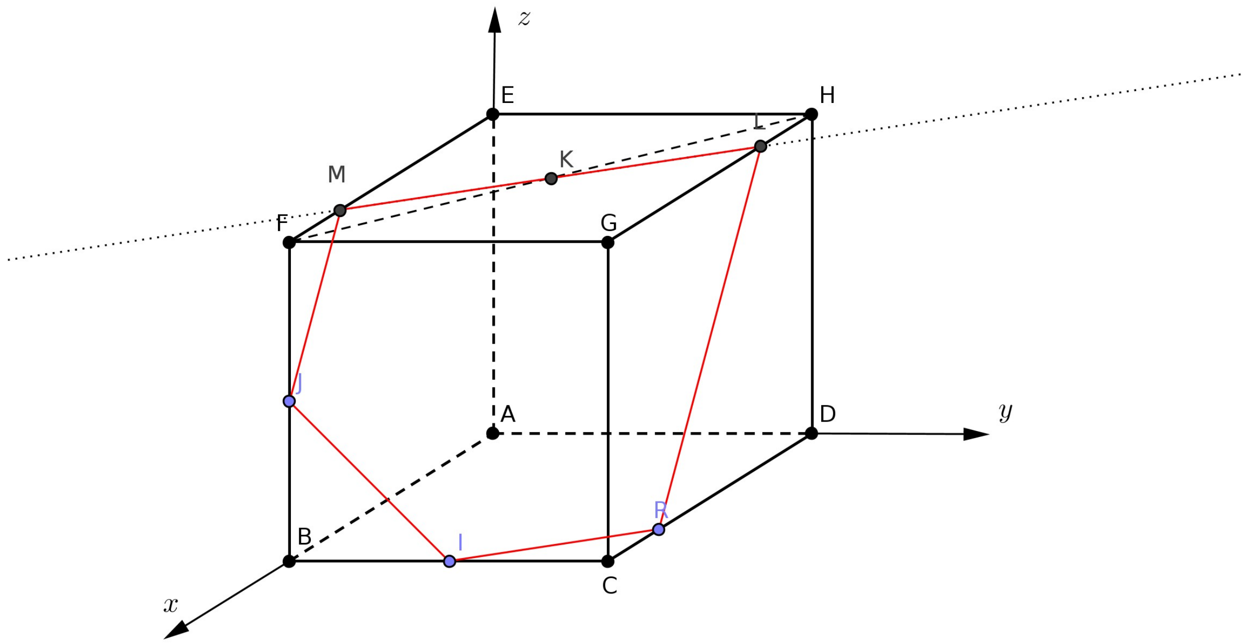


   Étape 2 :
   On sait qu'un plan sécant à deux plans parallèles les coupe suivant deux droites parallèles. Ici, (IJK) coupe (ABC) suivant la droite (RI) ; comme (EFG) est parallèle à (ABC), (EFG) et (IJK) se coupent suivant une droite parallèle à (RI).
   Comme d'autre part, K appartient à (EFG), l'intersection de (EFG) et (IJK) est la droite parallèle à (RI) passant par K.

Soient L et M les points d'intersection de cette droite avec [GH] et [FE] respectivement.
La section contient donc le segment [LM].



Étape 3 :
On peut relier les points qui se trouvent sur des faces communes.
On construit ainsi les segments [LR] et [JM].



La section du cube par le plan (IJK) est donc le polygone IJMLR.

5.

a) Vérifions que T appartient à (IJK) :

$$4\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{4}+2\times\frac{3}{4}-5=2+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-5=0$$

Les coordonnées de T vérifient l'équation de la question 2.b, donc T appartient à (IJK).
Vérifions que $\overrightarrow{TG}$ est un vecteur normal à (IJK).
On a $T\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$ et $G(1;1;1)$ donc : $\overrightarrow{TG}$ $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$. On voit que les coordonnées de $\overrightarrow{TG}$ et

de $\vec{n}$ sont proportionnelles : $\overrightarrow{TG}=\frac{1}{4}\vec{n}$.

Donc $\overrightarrow{TG}$ est normal au plan (IJK).

T appartient à (IJK) et la droite (TG) est orthogonale à (IJK), donc T est bien le projeté orthogonal de G sur (IJK).

b) La distance du point G au plan (IJK) est la distance TG par définition.

On calcule : $TG=\|\overrightarrow{TG}\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{4}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{6}{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

c) Pour que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) soient sécants, il suffit que la distance entre le centre G de la sphère et le plan soit plus petite que le rayon de la sphère.

On a vu que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

D'autre part , la sphère $\mathscr{S}$ a pour rayon GF=1.

On a $\frac{\sqrt{6}}{4}<1$ donc la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont bien sécants.

d) Soit U un point du cercle $\mathscr{C}$ intersection de $\mathscr{S}$ et (IJK). Alors le triangle GTU est rectangle en T, donc, d'après le théorème de Pythagore :

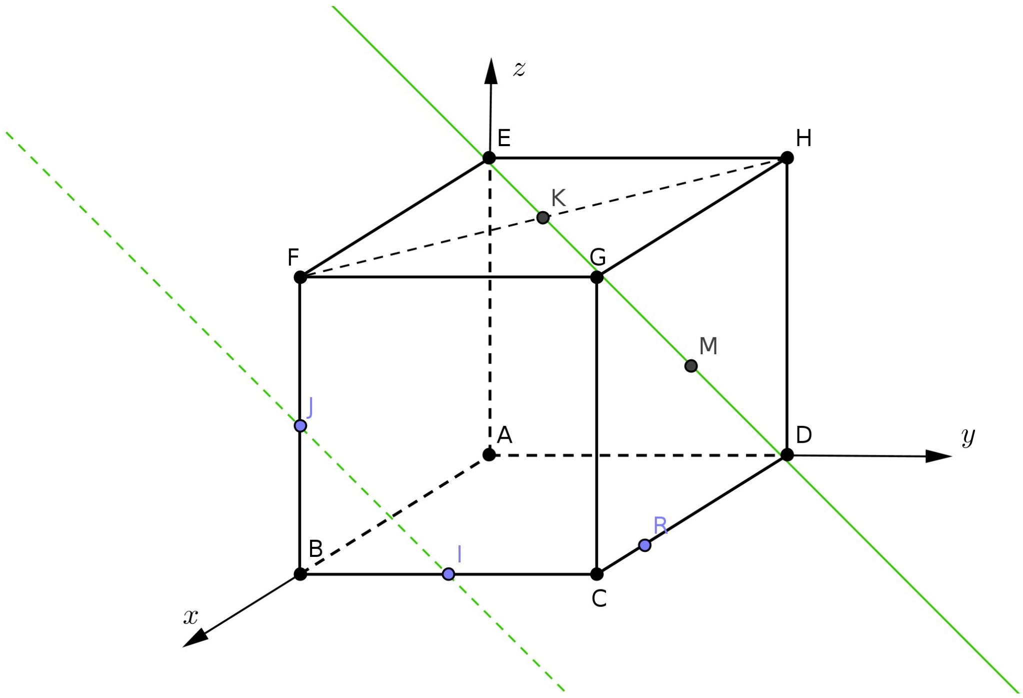
$GU^2=GT^2+TU^2$ soit : $1=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+TU^2$ soit encore : $TU^2=1-\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$ donc le rayon TU du cercle $\mathscr{C}$ est $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

6. Remarquons que ces deux plans sont bien sécants.
Le point K appartient à (IJK) et aussi à (EDG). En effet, les diagonales du carré EFGH se coupent en leur milieu ; K appartient donc à (EG), qui est incluse dans (EDG).

Considérons d'autre part les droites (IJ) et (ED).
(IJ) est incluse dans (IJK).
(ED) est incluse dans (EDG).
(IJ) est parallèle à (ED). En effet, on a $\overrightarrow{IJ}\ \left(0;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{ED}\ (0;1;-1)$ donc ces vecteurs sont colinéaires.
D'après le théorème du toit, on peut en conclure que la droite intersection de (IJK) et (EDF) est parallèle à (IJ).

Conclusion : l'intersection des plans (IJK) et (EDG) est la droite parallèle à (IJ) passant par K.

On peut remarquer que cette droite passe par M, le centre de la face DCGH.



Exercice 2 :

A(–1 ; 2 ; 3) ; $\mathscr{D}$: $\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t \\ z=2+2t \end{cases}$

1.

a) D'après le système d'équations paramétriques donné par l'énoncé, un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\vec{u}\ (4;1;2)$.
Le plan $\mathscr{P}$ est perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$, donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.
Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est donc : $4x+y+2z+d=0$.
Comme A appartient à $\mathscr{P}$, ses coordonnées vérifient l'équation précédente :
$4\times(-1)+2+2\times3+d=0$, d'où : $d=-4$.
Ainsi, une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est $4x+y+2z-4=0$.

b) Puisque H appartient à la fois à $\mathscr{D}$ et à $\mathscr{P}$,ses coordonnées vérifient le système :
$\begin{cases} x=9+4t \\ y=6+t \\ z=2+2t \\ 4x+y+2z-4=0 \end{cases}$
On remplace dans la dernière ligne : $4\times(9+4t)+(6+t)+2\times(2+2t)-4=0$.
Donc : $36+16t+6+t+4+4t-4=0$ soit $42+21t=0$ soit $t=-\dfrac{42}{21}=-2$.
On en déduit : $\begin{cases} x=9+4\times(-2)=1 \\ y=6+(-2)=4 \\ z=2+2\times(-2)=-2 \end{cases}$ Donc $\mathrm{H}(1;4;-2)$.

c) On a : $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\ (2;2;-5)$
On en déduit : $d=\left\|\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right\|=\sqrt{2^2+2^2+(-5)^2}=\sqrt{33}$

2. Soit M un point de la droite $\mathscr{D}$.

a) Soit $\mathrm{M}(x;y;z)$; les coordonnées de M vérifient la représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ donnée dans l'énoncé.
Donc $\mathrm{AM}^2=(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2$.

b) On a ainsi : $f(t)=(x+1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2$.
Calculons $f'(x)$.
On sait que $t \rightarrow g(at+b)$ a pour dérivée $t \rightarrow ag'(at+b)$; donc $t \rightarrow (at+b)^2$ a pour dérivée $t \rightarrow 2a(at+b)$.

On applique trois fois cette formule ; on obtient :
$f'(t)=8(4t+10)+2(t+4)+4(2t-1)=42t+84$

Ainsi, $f'(t)$ s'annule pour $t=-\frac{84}{42}=-2$.
On obtient le tableau suivant :

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	$f(-2)$	$\nearrow$	

On a : $f(-2)=(4\times(-2)+10)^2+(-2+4)^2+(2\times(-2)-1)^2=2^2+2^2+(-5)^2=33$.

Ainsi la valeur minimale de AM^2 est 33.
Or, AM est minimale lorsque AM^2 est minimale, car la fonction racine carrée est croissante.

Quelle que soit la position de M, on a $\mathrm{AM}^2 \geqslant 33$, donc $\mathrm{AM} \geqslant \sqrt{33}$.
La distance d est la valeur minimale de AM, elle vaut donc $\sqrt{33}$.